Inzien en bewijzen

Inzien en bewijzen

De uitgave van Inzien en bewijzen is mede mogelijk gemaakt dankzij subsidie uit het Universiteitshoogleraarsfonds van Johan van Benthem en uit de fondsen van het Spinoza-project van Henk Barendregt.
De samenstelling van dit boek werd begeleid door een klankbord van leraren en bêta-cultuurverspreiders, bestaande uit Wim Berkelmans, Christian Bokhove, Wout de Goede, Henk Pfaltzgraff, Jan de Ruijter en Marco Swaen.

Elektronische ondersteuning op internet
De website die hoort bij dit boek is te vinden op het volgende adres: http://www.cwi.nl/~jve/qed/

De reeks *Exact in context* is ontwikkeld voor gebruik in de Tweede Fase. Met behulp van aanpassingen in de dosering en docering is de reeks op tal van manieren inzetbaar: zowel voor HAVO 4/5 als voor VWO 4/5/6, zowel voor klassikale behandeling als voor gedeeltelijk gebruik, zowel voor vrijblijvende kennismaking als voor toetsing met behulp van vragen en opdrachten op verschillende niveaus.

Inzien en bewijzen is het tweede deel in de reeks *Exact in context*.

Inzien en bewijzen

Jan van Eijck en Albert Visser

Exact in Context 2

Docentenhandleiding Antwoorden

Amsterdam University Press

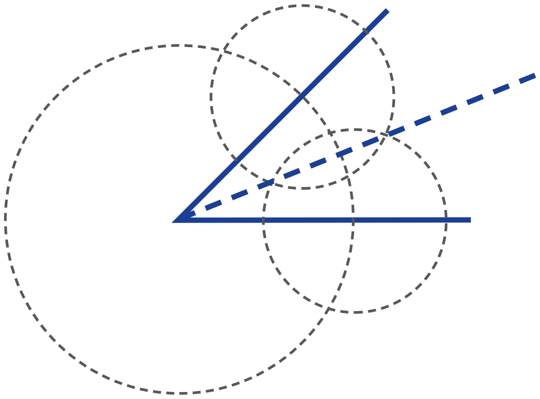
Omslagontwerp: Sabine Mannel / NAP, Amsterdam

ISBN 90 5356 788 7
NUGI 122 / 918

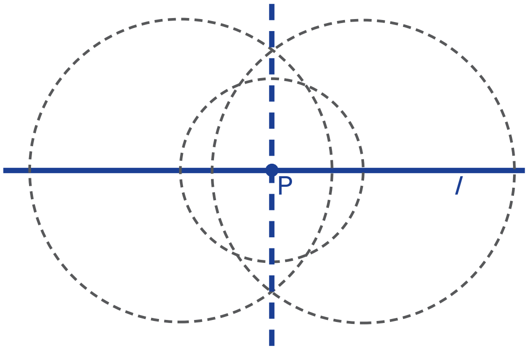
Hoofdstuk 1

Uitwerking van 1.1 In elk van de plaatjes zien we viermaal een rechthoekige driehoek. Noem de korte rechthoekszijde a, de lange rechthoekszijde b en de schuine zijde c. Dan zien we dat de oppervlakte van het vierkant in het linkerplaatje wordt gegeven door: $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$. Hierbij geeft $2ab$ dus de oppervlakte aan van de vier driehoeken samen. Het vierkant in het rechterplaatje is even groot, maar hier wordt de oppervlakte gegeven door c^2+2ab. Immers, $2ab$ is weer de oppervlakte van de vier driehoeken samen. Uit $a^2+2ab+b^2 = c^2+2ab$ volgt $a^2+b^2 = c^2$, en dat moest worden aangetoond.

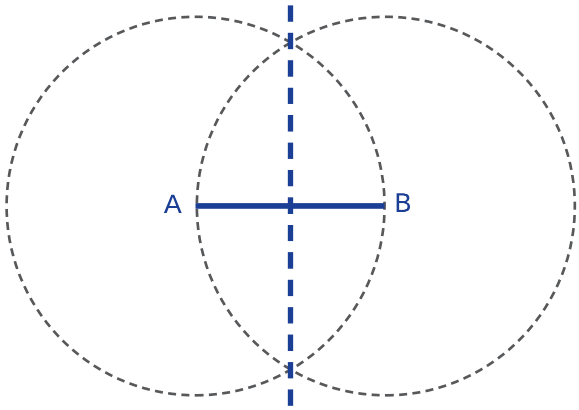
Uitwerking van 1.2



Uitwerking van 1.3



Uitwerking van 1.4



Uitwerking van 1.5 Driehoek *BAD* is gelijkbenig, dus $\angle DBA$ en $\angle ADB$ zijn gelijk, en $2\angle DBA + \angle BAD = 180°$. Driehoek *ACD* is ook gelijkbenig, dus $\angle ACD$ en $\angle ADC$ zijn gelijk, en $2\angle ADC + \angle CAD = 180°$.
Dus $2\angle BDC = 360° - (\angle BAC + \angle CAD) = 360° - 180° = 180°$, en $\angle BDC = 90°$.

Uitwerking 1.6 Onze favoriete programmeertaal is Haskell (zie *www.haskell.org*). Een Haskell-programma dat het gevraagde doet is het volgende. De ruimte ontbreekt om dit programma hier in detail uit te leggen; wie geïntrigeerd is zij verwezen naar de informatie over Haskell op internet.

```
fact :: Integer -> Integer
fact 0 = 1
fact n = n * fact (n-1)

prime :: Integer -> Integer
prime n = until (\d -> rem q d == 0) succ (n+1)
  where q = fact n+1

generate :: [(Integer,Integer,Integer)]
generate = map (\n -> (n, fact n+1, prime n)) [1..]
```

Dit is het programma dat we gebruikt hebben om de tabel op bladzijde 15 van het boek te genereren. Verder dan die tabel komen we overigens niet.

Hoofdstuk 2

Uitwerking van 2.1

Basisgeval $2^5 = 32 > 5^2 = 25$.

Inductiestap De inductiehypothese is $n \geq 5$ en $2^n > n^2$. We moeten op grond hiervan aantonen dat $2^{n+1} > (n+1)^2$. We hebben $2^{n+1} = 2 \cdot 2^n = 2^n + 2^n$ en $(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$. Omdat $2^n > n^2$ (inductiehypothese) is het genoeg om te laten zien dat $n^2 > 2n+1$, voor $n \geq 5$. Dat kan (voor wie dit niet direct gelooft) weer met inductie: $5^2 = 25 > 2 \cdot 5 + 1 = 11$ (basis), en: als $n^2 > 2n+1$, dan $(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 \overset{\text{ih}}{>} (2n+1) + (2n+1) > 2(n+1) + 1 = 2n+3$. De aanduiding $\overset{\text{ih}}{>}$ geeft aan waar de inductiehypothese is gebruikt in deze tweede inductie.

Uitwerking van 2.2 We moeten laten zien dat uit $a|b$ en $b|c$ volgt dat $a|c$. Neem dus aan dat $a|b$ en $b|c$. Om te laten zien dat $a|c$ moeten we een natuurlijk getal N vinden met de eigenschap dat $aN = c$. Uit $a|b$ weten we dat er een natuurlijk getal M is met $aM = b$, en uit $b|c$ weten we dat er een natuurlijk getal K is met $bK = c$. Als je nu aM invult voor b in $bK = c$ krijg je $aMK = c$. Neem $N = MK$, en je hebt aangetoond dat $a|c$.

Uitwerking van 2.3 Neem aan dat $n > 1$, terwijl $c = \mathrm{KD}(n)$ *geen* priemgetal is. Dit zou een tegenspraak moeten opleveren, en dat doet het ook. Immers, als c geen priemgetal is, dan zijn er natuurlijke getallen a, b, elk groter dan 1, met $c = ab$. Maar dan is a zeker kleiner dan c, en $a|c$. Maar uit $a|c$ en $c|n$ volgt dat $a|n$ (Opdracht 2.2). Dus is c niet de kleinste deler van n. De aanname dat $\mathrm{KD}(n)$ geen priemgetal is moet dus worden verworpen.

Uitwerking van 2.4 Neem aan dat n geen priemgetal is. Laat $b = \mathrm{KD}(n)$. Dan is er een a met $ba = n$. Dus $a|n$, maar omdat b de kleinste deler van n is geldt $b \leq a$. Maar dan is $b^2 \leq ba = n$, dat wil zeggen $(\mathrm{KD}(n))^2 \leq n$.

Uitwerking van 2.5 De som van de eerste n even getallen is gelijk aan $n(n+1)$.

Uitwerking van 2.6 Merk op dat de beweging die kever B maakt steeds haaks staat op de beweging van kever A. Het feit dat B beweegt ten opzichte van A is dus irrelevant: immers, de beweging die

B maakt brengt *B* niet dichter bij *A* en ook niet verder van *A* af. De afstand die *A* aflegt voordat hij *B* ontmoet is dus *a* (en net zo voor de andere kevertjes).

Uitwerking van 2.7 De snelheid waarmee de twee treinen elkaar naderen is 250 kilometer per uur, dus de botsing vindt plaats na precies een uur. In dat uur heeft de turbovlieg precies 200 kilometer afgelegd.

Uitwerking van 2.8 Het cruciale inzicht is dat bij elke stap het aantal witte steentjes *oneven* blijft. Immers, we beginnen met een oneven aantal witte steentjes. Stel dat we ergens midden in de procedure zitten, en er zit een oneven aantal witte steentjes in de vaas. Er zijn drie mogelijkheden.

1. Er worden twee witte steentjes getrokken. Er gaat nu een zwarte steen terug, en het aantal witte steentjes blijft oneven.
2. Er worden twee zwarte steentjes getrokken. Er gaat een zwarte steen terug. Het aantal witte steentjes verandert niet en blijft dus oneven.
3. Er wordt een zwart en een wit steentje getrokken. De witte gaat terug. Het aantal witte steentjes verandert niet en blijft dus oneven.

Als het laatste steentje zwart zou zijn, zou het aantal witte steentjes even zijn geworden (0 is even). Dat kan niet, dus het laatste steentje is wit.

Uitwerking van 2.9 $F_0 = 2^{2^0}+1 = 3$, $F_1 = 2^{2^1}+1 = 5$, $F_2 = 2^{2^2}+1 = 17$, $F_3 = 2^{2^3}+1 = 257$. $F_4 = 2^{2^4}+1 = 65537$.

Uitwerking van 2.10 Het Haskell-programma

```
map (\n -> 2^(2^n) + 1) [0..8]
```

geeft:

$$
\begin{aligned}
F_0 &= 3\\
F_1 &= 5\\
F_2 &= 17\\
F_3 &= 257\\
F_4 &= 65537\\
F_5 &= 4294967297\\
F_6 &= 18446744073709551617\\
F_7 &= 340282366920938463463374607431768211457\\
F_8 &= 1157920892373161954235709850086879078532699846\\
& 65640564039457584007913129639937
\end{aligned}
$$

Dit loopt verschrikkelijk snel op. Ontbinden in factoren is met simpele programma's vrijwel onbegonnen werk. Verder dan

$18446744073709551617 = 274177 \cdot 67280421310721$ komen we niet.

Uitwerking van 2.11

	$a_0 = 90$	$b_0 = 42$
$a_0 > b_0$	$a_1 = 48$	$b_1 = 42$
$a_1 > b_1$	$a_2 = 6$	$b_2 = 42$
$a_2 < b_2$	$a_3 = 6$	$b_3 = 36$
$a_3 < b_3$	$a_4 = 6$	$b_4 = 30$
$a_4 < b_4$	$a_5 = 6$	$b_5 = 24$
$a_5 < b_5$	$a_6 = 6$	$b_6 = 18$
$a_6 < b_6$	$a_7 = 6$	$b_7 = 12$
$a_7 < b_7$	$a_8 = 6$	$b_8 = 6$
$a_8 = b_8 = 6$		

	$a_0 = 90$	$b_0 = 43$
$a_0 > b_0$	$a_1 = 47$	$b_1 = 43$
$a_1 > b_1$	$a_2 = 4$	$b_2 = 43$
$a_2 < b_2$	$a_3 = 4$	$b_3 = 39$
$a_3 < b_3$	$a_4 = 4$	$b_4 = 35$
$a_4 < b_4$	$a_5 = 4$	$b_5 = 31$
$a_5 < b_5$	$a_6 = 4$	$b_6 = 27$
$a_6 < b_6$	$a_7 = 4$	$b_7 = 23$
$a_7 < b_7$	$a_8 = 4$	$b_8 = 19$
$a_8 < b_8$	$a_9 = 4$	$b_9 = 15$
$a_9 < b_9$	$a_{10} = 4$	$b_{10} = 11$
$a_{10} < b_{10}$	$a_{11} = 4$	$b_{11} = 7$
$a_{11} < b_{11}$	$a_{12} = 4$	$b_{12} = 3$
$a_{12} > b_{12}$	$a_{13} = 1$	$b_{13} = 3$
$a_{13} < b_{13}$	$a_{14} = 1$	$b_{14} = 2$
$a_{14} < b_{14}$	$a_{15} = 1$	$b_{15} = 1$
$a_{15} = b_{15} = 1$		

Uitwerking van 2.12 Stel $a > b$. Als d deler is van a en van b, dan zijn er m, n met $dm = a$ en $dn = b$. Dus is $a - b = d(m - n)$, dat wil zeggen: d deelt $a - b$. Als d deler is van $a - b$ en van b, dan zijn er m, n met $dm = a - b$ en $dn = b$. Dus is $a = (a - b) + b = dm + dn = d(m + n)$, dat wil zeggen: d deelt a. De redenering voor het geval $a > b$ gaat evenzo.

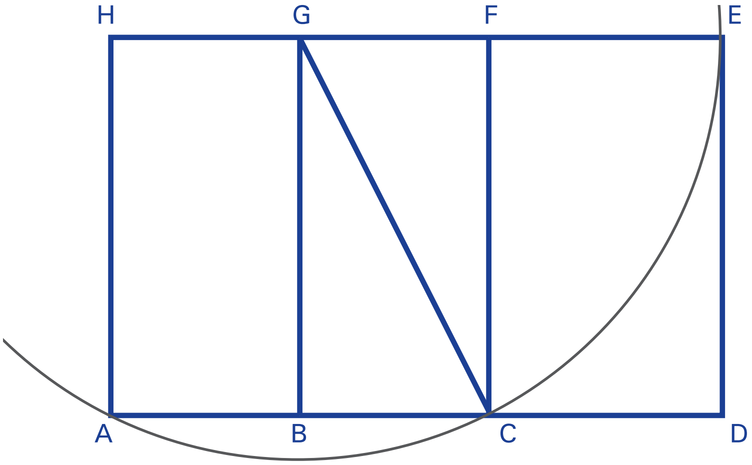
Uitwerking van 2.13 Stel dat er natuurlijke getallen p en q zijn, met $q \neq 0$, zodanig dat $(\frac{p}{q})^2 = 3$. Neem ook aan dat p en q geen factoren gemeen hebben. Dan is $\frac{p^2}{q^2} = 3$, dus $p^2 = 3q^2$. Hieruit volgt dat p een factor 3 moet hebben, want als dat niet zo is, dan is 3 ook geen factor van p^2. Dus $p = 3a$ voor zekere $a \in \mathbb{N}$. Hieruit volgt: $p^2 = (3a)^2 = 9a^2 = 3q^2$, en we krijgen nu dus ook dat $q^2 = 3a^2$. Daaruit volgt weer dat ook q een factor 3 heeft. Hiermee zijn we in tegenspraak gekomen met de aanname dat p en q geen factoren gemeen hebben.

Uitwerking van 2.14 Stel dat $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ een breuk is, zeg $\frac{p}{q}$. We weten dat $(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{2}-\sqrt{3}) = -1$, dus $\sqrt{2}-\sqrt{3} = -\frac{p}{q}$. Hieruit volgt: $2\sqrt{2} = (\sqrt{2}+\sqrt{3})+(\sqrt{2}-\sqrt{3}) = \frac{p}{q}-\frac{q}{p} = \frac{p^2-q^2}{pq}$. Dit brengt ons in tegenspraak met het feit dat $\sqrt{2}$ geen breuk is. Dus $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ is ook geen breuk.

Uitwerking van 2.15 We moeten laten zien dat, als p priem is, dan is $\sqrt{p}$ geen breuk. Neem dus aan dat p priem is en dat $\sqrt{p}$ wel een breuk is. Dan zijn er dus $n,m\in\mathbb{N}$ met $(\frac{n}{m})^2 = p$. We nemen weer aan dat n en m geen factoren gemeen hebben. Dan is $\frac{n^2}{m^2} = p$, en dus $n^2 = pm^2$. Uit het feit dat p priem is volgt nu dat n een factor p heeft, want kwadrateren introduceert geen nieuwe priemfactoren. Maar dan is er een $a\in\mathbb{N}$ met $n = pa$. Hieruit volgt dat $n^2 = p^2a^2 = pm^2$, en dus $m^2 = pa^2$. Er volgt dat ook m een factor p heeft, en dit geeft een tegenspraak met de aanname dat n en m geen factoren gemeen hebben.

Uitwerking van 2.16 We moeten laten zien: als $n\in\mathbb{N}$ en $\sqrt{n}\notin\mathbb{N}$, dan is $\sqrt{n}$ geen breuk. Neem $n\in\mathbb{N}$ met $\sqrt{n}\notin\mathbb{N}$, en veronderstel dat $\sqrt{n}$ een breuk is. Dan zijn er $p,q\in\mathbb{N}$ met $q \neq 0$ en $\sqrt{n} = \frac{p}{q}$. Weer nemen we aan dat p en q geen factoren gemeen hebben. Uit dit laatste volgt dat ook p^2 en q^2 geen factoren gemeen hebben (kwadrateren introduceert geen nieuwe priemfactoren). Aan de andere kant krijgen we uit $\sqrt{n} = \frac{p}{q}$ dat $n = \frac{p^2}{q^2}$, dus q^2 is een deler van p^2, en een tegenspraak.

Opmerking: als je goed naar Opdrachten 2.15 en 2.16 kijkt, zie je dat 2.15 een speciaal geval is van 2.16. Een efficiënte bewijsmethode is dus: eerst 2.16 bewijzen, en vervolgens 2.15 aanpakken



Figuur 1 De gulden snede.

door op te merken: als p priem is, dan is $\sqrt{p}$ zeker geen natuurlijk getal, dus volgt uit 2.16 dat $\sqrt{p}$ geen breuk is.

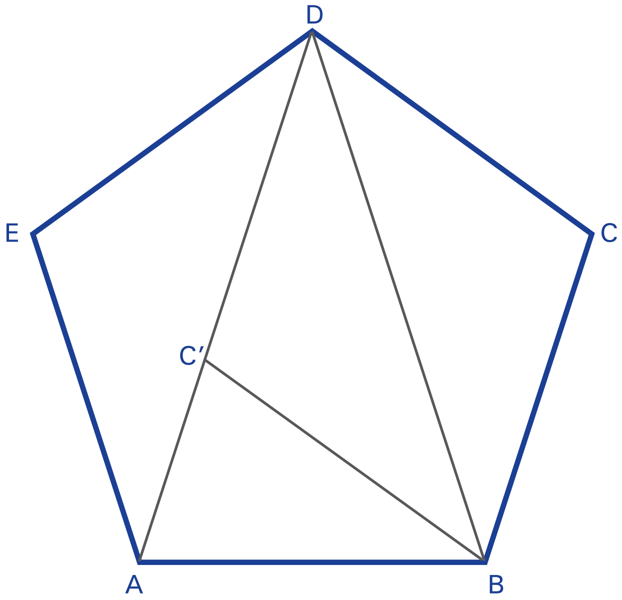
Uitwerking van 2.17 Stel dat ${}^{10}\log 2 = p/q$ voor positieve gehele getallen p en q. Dan geldt wegens de betrekking $L = {}^{b}\log a \Leftrightarrow b^L = a$ dat $10^{p/q} = 2$. Beide zijden verheffen tot de q-de macht geeft $10^p = 2^q$. Dit is onmogelijk, want er valt gemakkelijk in te zien dat alle positieve machten van 10 als laatste cijfer een 0 hebben, terwijl alle positieve machten van 2 als laatste cijfer een 2, 4, 8 of 6 hebben.

Uitwerking van 2.18 Stel de zijde van het vierkant $ACFH$ in Figuur 1 gelijk aan 2. Dan is $|GF| = 1$ en $|CF| = 2$, dus met de stelling van Pythagoras: $|CG| = \sqrt{5}$ en

$|EH| = |GH| + |EG| = |GH| + |CG| = 1 + \sqrt{5}$.

Stel nu dat $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ een breuk is, zeg $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = p/q$. Dan $\sqrt{5} = \frac{2p-q}{q}$, en tegenspraak met de uitkomst van Opdracht 2.15 (of met die van Opdracht 2.16).

Uitwerking van 2.19 Beschouw de regelmatige vijfhoek $ABCDE$ van Figuur 2. In die vijfhoek is AB een zijde, en AD en BD zijn diagonalen. Vouw de driehoek BCD naar binnen langs diagonaal BD. Daarbij komt punt C op de diagonaal AD terecht, op punt C'. De driehoeken DBA en BAC' zijn gelijkvormig. Stel de lengte van de diagonaal AD gelijk aan x en de lengte van de zijde AB gelijk aan 1. Dan is $|AC'| = |AD| - |DC'| = |AD| - |DC| = x - 1$. Wegens gelijkvormigheid van ΔDBA en $\Delta BAC'$ geldt dus: $x : 1 = 1 : (x-1)$. Dus is $x = \frac{1}{1-x}$, dat wil zeggen $x(x-1) = 1$, ofwel $x^2 - x - 1 = 0$. Oplos-



Figuur 2 Regelmatige vijfhoek.

sen van deze vergelijking met behulp van de formule $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ geeft $x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Combinatie met het feit dat x positief is geeft $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Inderdaad de gulden snede.

Uitwerking van 2.20 Als $\sqrt[3]{2} = p/q$, dan is $2q^3 = p^3$. In de representatie van p^3 als product van priemfactoren zullen alle priemfactoren voorkomen in veelvouden van 3, want de derde macht van een getal is gelijk aan het product van de derde machten van de priemfactoren van dat getal. In de representatie van $2q^3$ komt de factor 2 echter $3n+1$ maal voor, voor zekere n. Omdat volgens Stelling 2.4 de representatie uniek is, is dit onmogelijk.

Uitwerking van 2.21 Laat $A = \{4n+3 \mid n \in \mathbb{N}\}$, en neem aan dat A slechts eindig veel priemgetallen bevat. Dan is er een eindige verzameling $\{p_1, \ldots, p_k\}$ van alle priemgetallen in A. Beschouw nu het getal $Q = 4p_1 \cdots p_k - 1 = 4(p_1 \cdots p_k - 1) + 3$.

Als Q priem is, dan hebben we een tegenspraak met de aanname, en klaar. Als Q niet priem is, dan heeft Q een priemfactor P die verschilt van elke p_i. Immers, elke p_i deelt Q met rest -1. Als P de vorm $4n+3$ heeft zijn we klaar, want dan is P immers een priemgetal in A dat niet in de oorspronkelijke lijst $p_1, \ldots, p_k$ zit. Neem dus aan dat P van de vorm $4n+1$ is (meer mogelijkheden zijn er niet). Nu maken we gebruik van het feit dat $(4a+1)(4b+1)$ van de vorm $(4c+1)$ is. Vanwege dit feit, dat je kunt inzien door de vermenigvuldiging $(4a+1)(4b+1)$ uit te voeren, is $\frac{Q}{P}$ van de vorm $4n+3$. Ook moet $\frac{Q}{P}$ een priemfactor q_1 hebben. Na een eindig aantal stappen levert dit een priemfactor q_i op die van de vorm $4n+3$ is, met $q_i \neq p_1, \ldots, p_k$, en dat geeft ons de gezochte tegenspraak.

Uitwerking van 2.22 Noem het nieuwe papiertje *nieuw*, en de twee mogelijkheden voor het oude papiertje oud_{wit} en oud_{zwart}. Er zijn nu vier mogelijkheden:

1. *nieuw* wordt getrokken, en vervolgens oud_{wit};
2. *nieuw* wordt getrokken, en vervolgens oud_{zwart};
3. oud_{wit} wordt getrokken, en vervolgens *nieuw*;
4. oud_{zwart} wordt getrokken, en vervolgens *nieuw*.

De laatste mogelijkheid doet zich niet voor: het is immers gegeven dat het eerste papiertje dat getrokken wordt wit is. De andere drie mogelijkheden zijn elk even waarschijnlijk. De kans dat het tweede papiertje ook wit is is dus $\frac{2}{3}$.

Uitwerking van 2.23 In een gezin van twee kinderen met minstens een jongen zijn er drie mogelijkheden:

1. de oudste is een jongen, de jongste een jongen;
2. de oudste een jongen, de jongste een meisje;

3. de oudste een meisje, de jongste een jongen.

Alledrie deze mogelijkheden zijn even waarschijnlijk. De kans op twee jongens is dus $\frac{2}{3}$. In een gezin van twee kinderen met de oudste een meisje zijn er maar twee mogelijkheden:

1. de jongste is een meisje;
2. de jongste is een jongen.

Weer: allebei even waarschijnlijk. De kans op twee meisjes is dus $\frac{1}{2}$.

Uitwerking van 2.24 Op het moment dat je je oorspronkelijke keus maakt is elk van de drie deuren even waarschijnlijk. Je kans om te winnen met de keuze van deur 1 is dus $\frac{1}{3}$, en de kans dat de cabrio achter deur 2 of deur 3 staat is $\frac{2}{3}$. Als de quizmaster verklapt dat de cabrio niet achter deur 2 staat, is de waarschijnlijkheid dat hij achter deur 3 staat dus $\frac{2}{3}$. Door je keuze te herzien kun je je kans om te winnen dus verdubbelen.

Zoals altijd zijn er meerdere wegen naar het juiste inzicht. We bekijken de zaak even algemeen, en noemen de deuren A, B, C. Je kiest deur A. Er zijn nu drie mogelijkheden.

1. De cabrio staat achter deur A. De quizmaster doet een van de andere deuren open. Als je je keuze herziet verlies je.
2. De cabrio staat achter deur B. De quizmaster doet deur C open. Als je je keuze herziet win je.
3. De cabrio staat achter deur C. De quizmaster doet deur B open. Als je je keuze herziet win je.

Keuze herzien geeft dus in één van de drie mogelijke gevallen verlies en in de twee andere winst. Het is duidelijk dat je je keuze moet herzien.

Uitwerking van 2.25 In het eerste voorbeeld in de stap waar gedeeld wordt door $a-a$, want delen door 0 is niet toegestaan. In het tweede voorbeeld, in de stap waar gedeeld wordt door $a-b$. Omdat $a = b$, is $a-b$ gelijk aan 0, en delen door 0 is niet toegestaan.

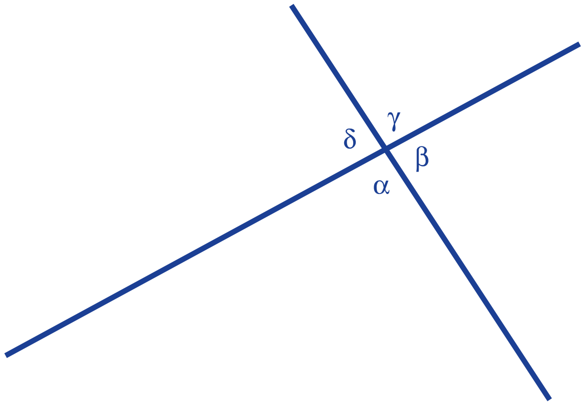
Uitwerking van 2.26 Redeneren over de gelijkheid van sommen van oneindige reeksen is alleen zinvol wanneer die reeksen convergeren. Welnu, de reeks $1-1+1-1+1-1+1-1+\ldots$ convergeert niet: de waarde slaat steeds om van 1 naar 0 en vice versa.

Uitwerking van 2.27 De fout zit in ‘Neem nu $r \in A-\{p,q\}$.’ Dit kan alleen als $A-\{p,q\}$ niet leeg is. Maar stel nu dat A twee elementen bevat, en p en q zijn twee verschillende elementen van A. Dan is $A-\{p,q\} = \emptyset$.

Hoofdstuk 3

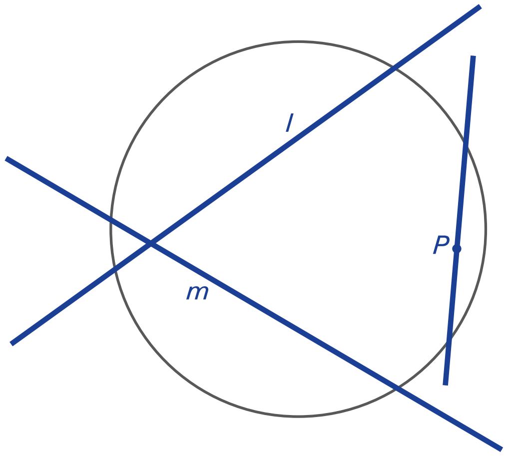
Uitwerking van 3.1 We hanteren het *Van Dale Basiswoordenboek van de Nederlandse Taal*, door Monique Huygen en Marja Verburg (1996). Dit woordenboek omschrijft *verzameling* als ‘groep van dingen die je bij elkaar hebt gebracht en die samen een geheel vormen, $\Rightarrow$ collectie.’ *Groep* wordt omschreven als ‘aantal mensen, dieren of dingen die bij elkaar horen’, *collectie* als ‘verzameling, vaak van waardevolle of interessante dingen.’ Hier hebben we al een cirkel, en dat is heus niet omdat het *Van Dale Basiswoordenboek* een woordenboek is voor kinderen.

Uitwerking van 3.2



Uit $\alpha = 180° - \beta$ en $\beta = 180° - \gamma$ volgt $\alpha = \gamma$. Uit $\alpha = \gamma$ volgt $180° - \alpha = 180° - \gamma$, dat wil zeggen $\beta = \delta$. Het enige postulaat dat we nodig hebben is postulaat IV: alle rechte hoeken zijn gelijk. Hieruit volgt meteen dat alle gestrekte hoeken gelijk zijn.

Uitwerking van 3.3



Uitwerking van 3.4 Laat een Klein-Beltrami-model gegeven zijn met een lijn *l* en een punt *P*. Als *l* een middellijn is van de schijf, dat wil zeggen, een lijn die door het middelpunt van de schijf gaat, dan is de euclidische loodlijn door *P* op *l* de gevraagde hyperbolische loodlijn. Dit volgt uit de eerste clausule in de definitie van 'loodrecht'. Als *l* geen middellijn is van de schijf, dan heeft *l* een pool *M*. De lijn *PM* is nu de gevraagde loodlijn. Dit volgt uit de tweede clausule in de definitie van 'loodrecht'.

Uitwerking van 3.5 In de Riemann-meetkunde worden tegenover elkaar liggende punten met elkaar geïdentificeerd. Dus de noord- en de zuidpool van de bol zijn in feite hetzelfde punt. Door dit ene punt gaan oneindig veel lijnen (grootcirkels), maar zodra je een punt neemt dat *niet* samenvalt met een van de polen, gaat er door dat punt en de pool precies één grootcirkel. Precies als bij euclidische meetkunde, dus.

Uitwerking van 3.6 De afstand tussen twee punten is de lengte van de kortste boog langs de grootcirkel die de twee punten met elkaar verbindt. Precies zoals je de afstand tussen Amsterdam en Moskou zou meten, dus.

Uitwerking van 3.7 De som van de hoeken van een driehoek is in de Riemann-meetkunde groter dan twee rechte hoeken. Kijk maar naar de driehoek op het aardoppervlak die gevormd wordt door de Greenwich-meridiaan 0°, de meridiaan 90°, en de evenaar, met de noordpool als tophoek. Elk van de drie hoeken in deze driehoek is recht, dus de som van de hoeken van de driehoek is gelijk aan *drie* rechte hoeken.

Uitwerking van 3.8 De hypothese dat de kosmische ruimte euclidisch is laat zich door meten niet verifiëren (er is immers altijd een meetfout), maar hoogstens falsifiëren. Maar dat wil zeggen dat de hypothese dat de kosmische ruimte *niet* euclidisch is zich door meten niet laat falsifiëren, maar hoogstens verifiëren. Het formele verschil tussen de twee hypothesen 'de kosmische ruimte is euclidisch' en 'de kosmische ruimte is hyperbolisch' zit hem in het feit dat de eerste hypothese geen existentiebewering doet maar de tweede juist wel: "er is een driehoek te vinden met een som van de hoeken kleiner dan 180°."

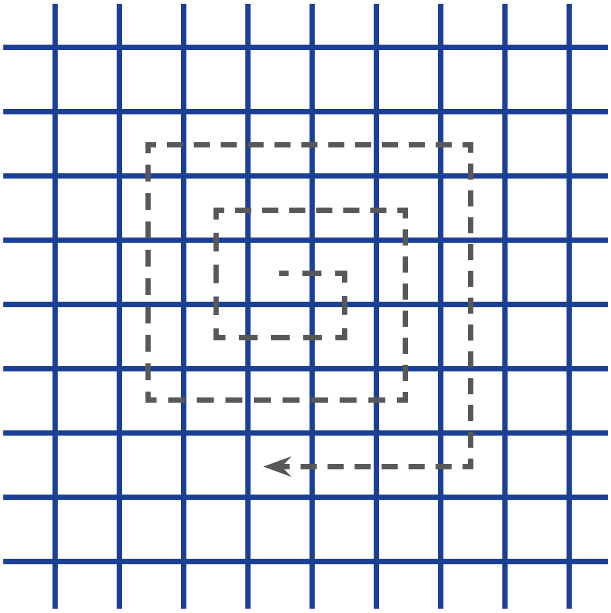
Uitwerking van 3.9 Als we in het euclidische vocabulaire praten over het euclidische vlak (of over het gedeelte ervan dat binnen de Klein-Beltrami-schijf ligt), dan zijn *punten* inderdaad gewoon punten en *cirkels* gewoon cirkels. Maar we kunnen ook in het hyperbolische vocabulaire praten over wat binnen de Klein-Beltrami-schijf van het euclidische vlak ligt. Dan zijn **punten** de punten die binnen de schijf liggen, en **cirkels** de verzamelingen van **punten** die allemaal dezelfde **afstand** hebben tot een gegeven **punt**. Omdat **afstand** niet hetzelfde betekent als *afstand*, zijn de definities van **cirkel** en *cirkel* dus verschillend.

Hoofdstuk 4

Uitwerking van 4.1 'Kwadrateren' op de reële getallen is geen injectie, want de kwadraten van (bijvoorbeeld) 2 en -2 zijn identiek. Het is ook geen surjectie, want er zitten geen negatieve getallen in het beeld van de functie. Omdat het geen injectie of surjectie is, is het dus zeker ook geen bijectie.

Uitwerking van 4.2 'Vermenigvuldigen met 2' op de natuurlijke getallen is een injectie, want uit $m \neq n$ volgt dat $2m \neq 2n$. Het is geen surjectie, want oneven getallen komen niet in het beeld van de functie voor. Omdat het geen surjectie is, is het zeker ook geen bijectie.

Uitwerking van 4.3 'Vermenigvuldigen met 2' op de reële getallen is een injectie, want uit $x \neq y$ volgt dat $2x \neq 2y$. Het is ook een surjectie, want elk reëel getal y kan worden geschreven als $2x$, voor $x = \frac{y}{2}$. Omdat de functie zowel een injectie als een surjectie is, is het een bijectie.



Figuur 3 Aftellen van de velden van een oneindig schaakbord.

Uitwerking van 4.4 Een oneindig schaakbord kan worden afgeteld op de manier van Figuur 3.

Uitwerking van 4.5 De breuk t/n ligt op plaats t op de diagonaal die volgt op de driehoek met hoekpunten $1/n$, $1/(t+n-2)$, en $(t+n-2)/1$. Het rangnummer is dus $\frac{(t+n-2)(t+n-1)}{2}+t$. Dit wil zeggen dat de formule $f(t,n) = \frac{(t+n-2)(t+n-1)}{2}+t$ voldoet.

Je kunt de aftelling van de paren van positieve natuurlijke getallen als volgt programmeren (weer in onze favoriete taal Haskell):

```
pnatpairs = [(x,z-x) | z <- [1..], x <- [1..(z-1)]]
```

Dit geeft:

```
Main> take 12 pnatpairs
[(1,1),(1,2),(2,1),(1,3),(2,2),(3,1),(1,4),(2,3),(3,2),(4,1),(1,5),(2,4)]
```

De zojuist gegeven functie heeft de volgende implementatie:

```
ppair (t,n) = (t+n-2) * (t+n-1) 'div' 2 + t
```

Samen geeft dit:

```
Main> take 12 (map ppair pnatpairs)
[1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12]
```

Uitwerking van 4.6 Neem aan dat de kamers van het Hilbert Hotel genummerd zijn als 0, 1, 2, ... Laat de gast van kamer 0 verhuizen naar kamer 1, die van kamer 1 naar kamer 2, en in het algemeen die van kamer n naar kamer $n+1$. Kamer 0 komt nu vrij voor de nieuwe gast.

Uitwerking van 4.7 Laat de gast van de kamer met nummer n verhuizen naar die met nummer $2n$. Dan zitten alle oude gasten in een kamer met een even nummer. De kamers met de oneven nummers komen nu vrij voor de inzittenden van de Hilbert-bus.

Uitwerking van 4.8 Laat f een aftelling zijn van de hotelgasten, en h_0, h_1, h_2, ... aftellingen van de inzittenden van de verschillende Hilbert-bussen. Dan kan dit totaal worden afgeteld met behulp van Cantors aftelprocedure voor de breuken:

$$
\begin{tikzcd}
f(0) \arrow[r] & f(1) \arrow[dl] & f(2) \arrow[dl] & f(3) \arrow[dl] & f(4) \arrow[dl] & f(5) \arrow[dl] & \dots \\
h_0(0) & h_0(1) \arrow[dl] & h_0(2) \arrow[dl] & h_0(3) \arrow[dl] & h_0(4) \arrow[dl] & h_0(5) & \dots \\
h_1(0) & h_1(1) \arrow[dl] & h_1(2) \arrow[dl] & h_1(3) \arrow[dl] & h_1(4) & h_1(5) & \dots \\
h_2(0) & h_2(1) \arrow[dl] & h_2(2) \arrow[dl] & h_2(3) & h_2(4) & h_2(5) & \dots \\
h_3(0) & h_3(1) \arrow[dl] & h_3(2) & h_3(3) & h_3(4) & h_3(5) & \dots \\
h_4(0) & h_4(1) & h_4(2) & h_4(3) & h_4(4) & h_4(5) & \dots \\
\text{etc.} & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{tikzcd}
$$

Uitwerking van 4.9 Elke niet-lege eindige deelverzameling van $\mathbb{N}$ bevat een grootste getal n. Het is duidelijk dat er eindig veel deelverzamelingen van $\mathbb{N}$ zijn waarin n het grootste getal is; om precies te zijn zijn het er 2^n. We kunnen dus als volgt aftellen: eerst $\varnothing$, dan de ene deelverzameling met 0 als grootste element, dan de twee deelverzamelingen met 1 als grootste element, dan de vier deelverzamelingen met 2 als grootste element, enzovoorts.

Uitwerking van 4.10 Een getal n codeert een verzameling X_n als volgt. Schrijf de binaire representatie van n op. Dan definiëren we $m \in X_n$ dan en slechts dan als op de $n+1$-e plaats tellende van rechts naar links in de binaire representatie van n een 1 staat. Dit geeft aan elke eindige deelverzameling van $\mathbb{N}$ een unieke code. Immers, de code voor $\varnothing$ is 0 en de code voor $\{a_1,\dots,a_n\}$ is $2^{a_1}+\cdots+2^{a_n}$.

Hoofdstuk 5

Uitwerking van 5.1

Van (1) naar (2).
Stel $A \subseteq B$, dat wil zeggen: elk element van A is element van B.
Te bewijzen: $A \cap B = A$.
Bewijs: De elementen van $A \cap B$ zijn de elementen die zowel in A als in B zitten.
Omdat elk element van A in B zit zijn dit precies de elementen in A.

Van (2) naar (3).
Stel $A \cap B = A$.
Te bewijzen: $A \cup B = B$.
Bewijs: De elementen van $A \cup B$ zijn de elementen die in A of in B zitten.
Volgens het gegeven zitten de elementen van A in A en in B.
Dus de elementen van $A \cup B$ zijn de elementen die in (A en B) of in B zitten.
Dit zijn precies de elementen van B.

Van (3) naar (1).
Stel $A \cup B = B$.
Te bewijzen: $A \subseteq B$.
Bewijs: Neem een willekeurig element x van A. Dan $x \in A \cup B$.
Dus volgens gegeven $x \in B$.
Dus $A \subseteq B$.

Uitwerking van 5.2

Van (1) naar (2).
Stel n is deelbaar door 3.
Te bewijzen: $3n$ is deelbaar door 9.
Bewijs: Uit de aanname volgt dat er een $m \in \mathbb{N}$ is met $n = 3m$.
Dus $3n = 3(3m) = 9m$, dat wil zeggen, $3n$ is deelbaar door 9.

Van (2) naar (3).
Stel $3n$ is deelbaar door 9.
Te bewijzen: $n+3$ is deelbaar door 3.
Bewijs: Uit de aanname: er is een $k \in \mathbb{N}$ met $3n = 9k$.

Dus $n = 3k$, en $n+3 = 3k+3 = 3(k+1)$, dat wil zeggen, $n+3$ is deelbaar door 3.

Van (3) naar (1).
Stel $n+3$ is deelbaar door 3.
Te bewijzen: n is deelbaar door 3.
Bewijs: Uit de aanname: er is een $k \in \mathbb{N}$ met $n+3 = 3k$.
Dus $n = 3k-3 = 3(k-1)$, dat wil zeggen, n is een drievoud.

Uitwerking van 5.3

Er zijn drie mogelijkheden:

1. n is deelbaar door 3. Dan $n(n+1)(n+2)$ zeker ook.
2. $n+1$ is deelbaar door 3. Dan $n(n+1)(n+2)$ zeker ook.
3. $n+2$ is deelbaar door 3. Dan $n(n+1)(n+2)$ zeker ook.

Uitwerking van 5.4

De bewering is onwaar. $A = \{1,2\}$ en $B = \{2,3\}$ levert een tegenvoorbeeld. We hebben dan:

$$\begin{aligned}\wp(A \cup B) &= \wp(\{1,2,3\}) \\ &= \{\varnothing,\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\wp A \cup \wp B &= \wp(\{1,2\}) \cup \wp(\{2,3\}) \\ &= \{\varnothing,\{1\},\{2\},\{1,2\}\} \cup \{\varnothing,\{2\},\{3\},\{2,3\}\} \\ &= \{\varnothing,\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{2,3\}\}.\end{aligned}$$