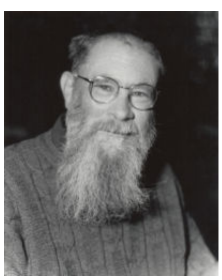
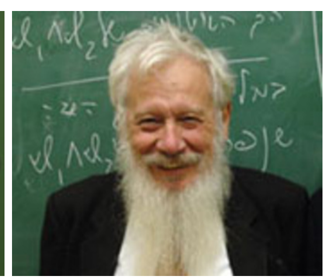
Redeneren over Communicatie

Jan van Eijck

Het communicatieve effect van een collectieve email van Wouter Bos aan al zijn contacten is totaal anders dan van hetzelfde bericht gestuurd aan iedere geadresseerde persoonlijk. In dit stuk zal worden ingegaan op de vraag hoe je dit soort verschillen kunt molleren in kennislogica (of: epistemische logica).

1 Heel Korte Geschiedenis

Kennislogica (zie voor een beknopt overzicht hoofdstuk 6 uit het gratis e-book (2)) is in verschillende milieus tegelijkertijd uitgevonden. Op het plaatje hieronder zijn van links naar rechts een filosoof, een logicus, en een econoom te zien.

De filosoof is David Lewis, de logicus Jaakko Hintikka, en de econoom Robert Aumann. Op dit moment wordt aan het onderwerp kennislogica weer hard gewerkt, want kennislogica is druk bezig een kernonderwerp in de theoretische informatica en in de economische speltheorie te worden.

We introduceren het onderwerp aan de hand van de beroemde 'puzzel van de modderige kinderen'. Het plaatje daarbij is van Marco Swaen.

Stel je voor dat vier kinderen buiten hebben gespeeld. Ze worden door vader binnengeroepen. Annie is netjes, maar Bert, Catootje en Dora hebben modder op hun snoet. Zelf kunnen ze dat niet zien: de modderveeg zit op hun voorhoofd. Nu zegt vader: “Minstens één van jullie heeft modder op zijn snoet.” Daarna speelt zich het volgende af. Eerst vraagt vader: “Wie weet er nu of ie vies is?”, en ze zeggen allemaal nee. Dan stelt vader nog een keer dezelfde vraag, en weer zeggen ze allemaal nee. Dan stelt vader de vraag voor de derde keer, en nu zeggen Bert, Catootje en Dora in koor: “Wij weten het nu.” En als vader het tenslotte voor de vierde keer vraagt zegt Annie: “Nu weet ik het ook.”

	a	b	c	d
minstens een van jullie is vies	○	●	●	●
wie weet er of ie vies is?	N	N	N	N
wie weet er of ie vies is?	N	N	N	N
wie weet er of ie vies is?	N	J	J	J
wie weet er of ie vies is?	J			

Als je niet direct ziet hoe de kinderen redeneren, dan helpen de volgende twee plaatjes van situaties met één en twee modderige kinderen.

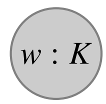
	a	b	c	d
minstens een van jullie is vies	○	○	○	●
wie weet er of ie vies is?	N	N	N	J
wie weet er of ie vies is?	J	J	J	

	a	b	c	d
minstens een van jullie is vies	○	○	●	●
wie weet er of ie vies is?	N	N	N	N
wie weet er of ie vies is?	N	N	J	J
wie weet er of ie vies is?	J	J		

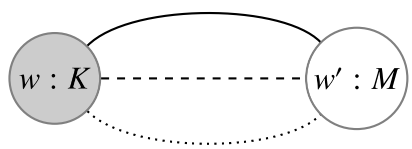
2 Modelleren van onzekerheid

In kennislogica worden abstracte modellen van dit soort situaties ontworpen. We beginnen met een simpel geval. Ik moet een vervelend klusje doen. Ik stop een munt in een bekertje, schud een paar keer, en zet het bekertje omgekeerd op tafel. “Als het kruis is doe ik het vandaag, als het munt is stel ik het uit.” Ik hoop natuurlijk dat het munt is, maar zolang ik niet onder het bekertje heb gekeken weet ik het niet. Stel nu dat er in feite kruis onder het bekertje ligt. Dan kunnen we de situatie als volgt modelleren.

Zodra ik zeg “En nu wil ik het weten!” en de beker oplicht verdwijnt de link tussen de echte situatie (links) en de situatie zoals hij volgens mij ook had kunnen zijn (rechts). Ik weet nu hoe het zit, en ik verwar de situatie waar kruis gevallen is niet meer met de situatie waar munt is gevallen.

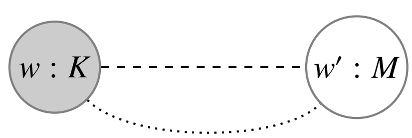


Ditzelfde scenario kan zich ook afspelen in groepsverband. Neem aan dat Annie de beker schudt en omkeert, terwijl Bert en Catootje toekijken. De beker staat nu omgekeerd op tafel met de munt eronder, en de onzekerheden zijn als volgt.

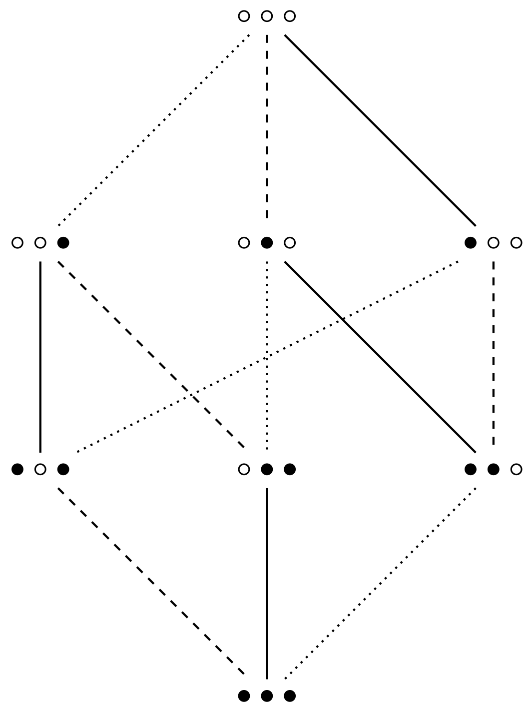


In het plaatje staan drie soorten onzekerheidsrelaties: die van Annie (een ononderbroken lijn), die van Bert (een streepjeslijn) en die van Catootje (een stippellijn).

Nu kijkt Annie onder de beker, terwijl Bert en Catootje blijven toekijken. Hier is het resultaat: de onzekerheid van Annie is verdwenen, die van Bert en Catootje is blijven bestaan.



Deze zelfde manier van modelleren kunnen we ook toepassen op de puzzel van de modderige kinderen. Stel dat er drie kinderen zijn. Dat geeft $2^3 = 8$ mogelijke situaties, en de bijbehorende onzekerheidsrelaties. De kinderen staan in alfabetische volgorde op de plaatjes, dus $\bullet \circ \circ$ wil zeggen dat Annie vies is en Bert en Catootje allebei schoon. Die situatie zal Annie niet van de situatie kunnen onderscheiden waar iedereen schoon is (want ze ziet haar eigen vieze veeg niet), dus er loopt een Annie-link naar $\circ \circ \circ$. Dit geeft het volgende plaatje.

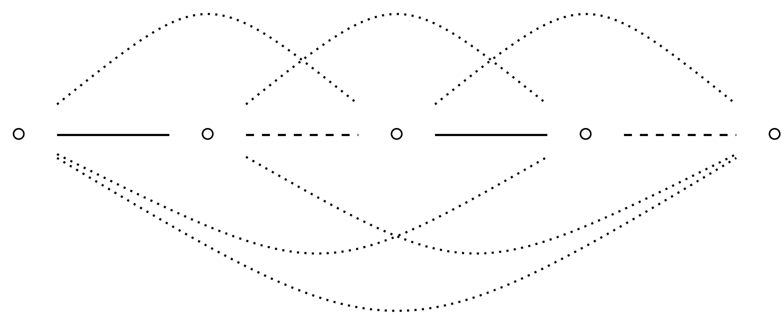


Het effect van de communicatie die plaatsvindt is als volgt. Als vader zegt “Minstens een van jullie is vies geworden” verdwijnt de bovenste situatie, plus alle onzekerheid-links naar die situatie. Die situatie is immers in tegenspraak met wat vader zegt. Als Annie nu zegt “Ik weet niet of ik vies ben” verdwijnt de situatie met ○ ○ ●: in die situatie weet ze het immers. Enzovoort. Stel dat de situatie ● ● ○ de werkelijke situatie is (Annie en Bert zijn vies, Catootje is schoon). Dan zal op zeker moment ●●○ samen met ●●● nog over zijn, en dan weten Annie en Bert dat ze vies zijn, en zodra die twee zeggen “we weten het nu” weet Catootje dat ze niet vies is.

De achtergrond-veronderstelling bij dit alles is dat alle communicatie openbaar is: iedereen hoort wat de anderen zeggen, en iedereen weet ook dat dat zo is. Zonder dat werkt het scenario niet: dit is een scenario voor het communicatieve effect van zogenaamde openbare aankondigingen (Engels: Public Announcements). Het effect van een openbare aankondiging ϕ is dat het domein wordt *beperkt* tot de situaties waar ϕ waar is.

3 Collectief weten

Wat betekent het dat Annie en Bert samen iets weten? Laten we zeggen dat ze samen een geheim G hebben. Dan moet gelden dat G waar is. Maar ook: Annie kent G, Bert kent G, Annie weet dat Bert G kent, Bert weet dat Annie G kent, enzovoorts. Dit gaat eindeloos door: het 'weten dat' kan *willekeurig diep* zijn genest. Zo'n 'collectief weten' relatie kun je berekenen uit individuele onzekerheidsrelaties met behulp van transitieve afsluiting.



Hier is een definitie van 'collectief weten' (Engels: common knowledge): ϕ is common knowledge als iedereen weet dat ϕ en iedereen weet dat ϕ common knowledge is. Dit is circulair, want het te definiëren begrip komt in de definitie zelf voor, maar de cirkel is niet vicieus. Vergelijk: `nullen = 0 : nullen`. Dit is een definitie van een oneindige rij nullen.

Allerlei protollen uit het dagelijkse sociale leven zijn gericht op het creëren van collectief begrip. Neem bij voorbeeld het uitbetaal-ritueel als iemand contant geld opneemt bij zijn bank. De caissière zorgt ervoor dat ze je volle aandacht heeft, en telt dan het geld uit: vijftig, honderd, honderdvijftig, dat maakt tweehonderd euro. Er ontstaat 'common knowledge' dat er vier biljetten van vijftig euro zijn uitbetaald. Als het geld uit een geldautomaat komt is zulk collectief weten er niet.

De “Wouter Bos email” was een bericht waar iedereen de cc-lijst kon zien. Dit staat gelijk aan een openbare aankondiging. Een privé bericht ϕ aan een ontvanger i werkt heel anders: alle anderen kunnen dit niet onderscheiden van een actie waarbij niets gebeurt:

$$\boxed{\phi} \overset{N-\{i\}}{\text{———}} \boxed{\top}$$

Het communicatieve effect hiervan is dat er een situatie ontstaat waarbij i de inhoud van het bericht weet, maar de anderen weten *niet* dat i het weet. Er ontstaat juist geen collectief weten, en dat is vaak ook precies de bedoeling.

Robert Aumann (1) heeft gewezen op de belangrijke rol van collectief weten in het inschatten van economische risico’s, en bij economische waarde-bepaling. Zijn stelling: in het economisch verkeer is het niet redelijk “to agree to disagree” (het erover eens te zijn dat we het over de waarde-bepaling van een economisch goed niet eens zijn). Neem het geval van weddenschappen, bij voorbeeld over de volgende vraag.

“Zal het huidige kabinet een volle regeringstermijn uitzitten?”

Stel: volgens mij zijn de kansen 3 tegen 1 van niet, volgens mijn collega Eric Pacuit 1 tegen 1. Dit is bovendien ‘common knowledge’. Wij zijn allebei bereid hierover weddenschappen aan te gaan. Dan kan onze andere collega Hans van Ditmarsch[1] gegarandeerd winst maken. Hoe?

Hans zet 1000 euro in bij Jan op ‘kabinet valt niet’ en 2000 bij Eric op ‘kabinet valt’. Als het kabinet niet valt keert Jan 3000 euro uit, en zijn de 2000 bij Eric verspeeld: winst van 1000 euro voor Hans. Als het kabinet valt is de 1000 euro bij Jan verspeeld maar keert Eric 2000 euro uit: winst van 1000 euro voor Hans. Dit heet ‘a Dutch book’: een weddenschap waarbij een van de partijen altijd winst heeft (en de andere partij altijd verlies). Zulke weddenschappen moeten Jan en Eric dus niet samen aanbieden, want als ze dat wel doen gaan ze samen de boot in.

Referenties

[1] R.J. Aumann. Agreeing to disagree. *Annals of Statistics*, 4(6):1236–1239, 1976.

[2] Johan van Benthem, Hans van Ditmarsch, en Jan van Eijck. *Logica in Actie*. Academic Service, 2009. Beschikbaar via `http://www.ou.nl/eCache/DEF/2/24/435.html`.

Over de auteur Jan van Eijck (1951) is senior onderzoeker aan het CWI (Centrum Wiskunde & Informatica) in Amsterdam, en hoogleraar computationele linguistiek aan de Universiteit van Utrecht. Een van zijn interessegebieden is de formele theorie van kennis en communicatie.

[1] Eric Pacuit, Hans van Ditmarsch en Jan van Eijck waren de drie sprekers op het Wintersymposium van het Koninklijk Wiskundig Genootschap, op 8 januari 2011 in Utrecht.