1 Literatuur

J.F.A.K. van Benthem (e.a.): Logica voor Informatici (3e ed.), Addison Wesley (2003). Te behandelen stof: Hoofdstukken 2, 3 (tot 3.4), 6, 7, 9, 16 (tot 16.8).

Voor een extra studiepunt bestudeer je uit hoofdstuk 4 (Propositielogica: afleidingen) de secties 4.1 tot en met 4.3. Voor deze extra stof kan een afspraak gemaakt worden voor een extra tentamen.

2 Eavluatie

- De behandelde stof wordt schriftelijk geëxamineerd op 08-06 om 10.00-13.00.
- Daarnaast worden proeftentamens gegeven (tijdens werkcolleges).
- Tot slot, moet er de volgende **programmeeropgave** in PROLOG gemaakt worden:

  Download SWI-Prolog en implementeer de semantische tableau methode voor propositionele logica. Hint : representeer propositionele formules als termen en introduceer (en definieer in Prolog) predikaten 'waar' en 'onwaar'.

  Email je Prolog programma uiterlijk woensdag 26 mei naar F.S.de.Boer@cwi.nl.

Voor het eindcijfer telt het schriftelijk tentamen voor 50%. Het gemiddelde van de proeftentamens en de programmeeropgave tellen beide voor 25%.

Tentamen Het tentamen is op 8 juni van 9.00 tot 13.00. Naast het hertentamen op 4 augustus is er een hertentamen op dinsdag 29 juni van 14.00 tot 17.00. Je kunt maar één (1) hertentamen doen (je moet dus kiezen).

3 Rooster

College en Werkgroep

05-02	:	Algemene inleiding.
12-02	:	Hoofdstuk 2 (en zie aantekeningen onderstaande Sectie 4).
17-02	:	Opgaven 2.1 t/m 2.6 en extra opgave 1, onderstaande Sectie 7.
19-02	:	Hoofdstuk 3 (tot 3.3).
03-03	:	Opgaven 3.1 t/m 3.5.
05-03	:	Hoofdstuk 3 (3.4) en Sectie 5.5 uit Hoofdstuk 5.
10-03	:	Proeftentamen I (zie Sectie 8 hieronder).
12-03	:	Bespreking proeftentamen en adequaatheidsstelling semantische tableaus (zie aantekeningen onderstaande Sectie 5).
17-03	:	Herkansing voor het eerste proeftentamen: inleveropgave 2 (onderstaande Sectie 7). Opgaven 5.1, 5.2 en 5.6.c.
19-03	:	Hoofdstuk 6 (Predikaatlogica: taal).
24-03	:	Opgaven 6.1, 6.5, 6.6 en 6.7.
26-03	:	Hoofdstuk 7 (7.1, 7.2 en 7.3).
31-03	:	Opgaven 7.1, 7.3, 7.4 en 7.8.
09-04	:	Hoofdstuk 7 (7.4) en hoofdstuk 9 (9.1 en 9.2).
14-04	:	Opgave 9.1 (tot vi).
16-04	:	Hoofdstuk 7 (7.5) en hoofdstuk 9 (9.3 en 9.4).
21-04	:	Opgaven 9.2 en 9.3.
23-04	:	Hoofdstuk 16 (16.4), zie ook de aantekeningen in onderstaande Sectie 6.
28-04	:	Proeftentamen II (zie Sectie 8 hieronder).
07-05	:	Hoofdstuk 16 (16.1 t/m 16.3).
12-05	:	Bespreking Proeftentamen II en extra opgaven 3 en 4 (onderstaande Sectie 7).
19-05	:	Werkcollege komt te vervallen.

4 Aantekeningen bij 12-2

1. Logos (grieks) = het (gesproken) woord.
2. Logica betreft het formaliseren van beweringen en redeneringen.
3. Toepassingen in de informatica:
   (a) Electronic engineering (digital boolean circuits);
   (b) Logich prgrammeren (Prolog);
   (c) Programma correctheid.
4. Basis onderscheid: vorm versus inhoud (teken versus betekenis): Rederingen zijn geldig vanwege hun vorm (*niet* vanwege de betekenis van de beweringen).

Voorbeeld: Als de maan van kaas is dan is de aarde plat. De maan is van kaas. Dus is de aarde plat. Dit is een geldige redenering want de conclusie volgt uit de aannamen. De beweringen zelf zijn onwaar.

5. Vorm= syntax (structuur) en inhoud = semantiek.

6. Compositionaliteit: de betekenis van een samengestelde bewering wordt eenduidig bepaald door de betekenis van de onderdelen (het geheel *is* de som der delen).

7. Propositielogica formaliseert beweringen en redeneringen in termen van *connectieven* als *en*, *of*, *niet*, *als ... dan*, en de boolean waarheidswaarden *waar* en *onwaar* (een bewering is waar of onwaar).

8. De *taal* van de propositielogica bestaat uit een *alfabet* (een verzameling tekens) en *grammaticaregels*.

9. Het alfabet van de propositielogica bestaat uit:

   (a) Propositieletters $p, q, \ldots$ die staan voor *atomaire* bewerinegn als 'het regent'.

   (b) connectieven: $\neg$ (niet), $\wedge$ (en), $\vee$ (of), $\rightarrow$ (als ... dan ...), $\leftrightarrow$ (dan en slechts dan als). Merk op: $\neg$ is één-plaatsig, en $\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ zijn twee-plaatsige connectieven.

   (c) Haakjes: (,) om de volgorde vast te leggen.

10. We introduceren de volgende grammaticaregels voor het *inductief* definieren van samengestelde beweringen (of formules):

    (a) elke propositieletter p is een formule;

    (b) als ϕ en ψ formules zijn dan ook $\neg\phi$, $(\phi \wedge \psi), \ldots$.

    Hier zijn ϕ en ψ formulevariabelen (ook wel *non-terminals* genoemd).

    Voorbeelden: $p \vee \neg p$, $\neg(p \wedge \neg p)$, $p \rightarrow (q \wedge r)$,
    $(p \rightarrow (q \vee r)) \leftrightarrow ((p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)$.

    Volgens bovenstaande definitie zijn $\wedge pr$, $p \wedge q)$, en $\neg(p)$ geen formules.

11. Semantiek: beweringen zijn waar of onwaar. Maar om te bepalen dat, bijvoorbeeld, $p \wedge q$ waar is moeten we weten waar p en q voor staan. Vegelijk dit met de wiskundige uitspraak dat $x \geq 0$ (x is groter of gelijk aan 0), waar x een *variabele* is. Deze uitspraak is waar als x is 3 (maar onwaar voor -1). Zo is $p \wedge q$ waar als p *en* q waar zijn. Maar $p \wedge q$ is onwaar als p *of* q onwaar is.

    We *representeren* de 'waarheidswaarden' door 1 (staat voor 'waar') en 0 (staat voor 'onwaar'). We kennen waarheidswaarden aan propositieletters toe door middel van een *waardering* V (van valuatie): $V(p) = 1$ staat voor 'p is *waar*' en $V(p) = 0$ staat voor 'p is *onwaar*'.

12. We kunnen nu $V(\phi)$ *uitrekenen* door middel van de volgende definities:

    - $V(\neg\phi) = 1 - V(\phi)$
    - $V(\phi \wedge \psi) = min(V(\phi), V(\psi))$
    - $V(\phi \vee \psi) = max(V(\phi), V(\psi))$
    - $V(\phi \rightarrow \psi) = max(1 - V(\phi), V(\psi))$

13. Gegeven bovenstaande waarheidsdefinitie kunnen we dan de volgende *waarheidstafels* voor de connectieven $\neg$, $\wedge$, $\vee$, and $\rightarrow$ afleiden:

ϕ	$\neg\phi$
1	0
0	1

ϕ	ψ	$\phi \wedge \psi$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

ϕ	ψ	$\phi \vee \psi$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

ϕ	ψ	$\phi \rightarrow \psi$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

14. We kunnen de 'waarheidswaarden' ook door de *verzamelingen* $\emptyset$ and $\{\emptyset\}$ representeren. De singleton verzameling $\{\emptyset\}$ met als enig element de lege verzameling staat voor 'waar' en de lege verzameling $\emptyset$ staat voor 'onwaar'. We kennen waarheidswaarden aan propositieletters toe door middel van een *waardering* V (van valuatie): $V(p) = \{\emptyset\}$ staat voor 'p is *waar*' en $V(p) = \emptyset$ staat voor 'p is *onwaar*'.

15. We interpreteren de logische connectieven nu als operaties op verzamelingen: conjunctie interpreteren we als intersectie en disjunctie als vereniging. Negatie interpreteren we als complement m.b.t. het universum $\{\emptyset\}$, d.w.z., $\overline{\emptyset} = \{\emptyset\} \setminus \emptyset = \{\emptyset\}$ en $\overline{\{\emptyset\}} = \{\emptyset\} \setminus \{\emptyset\} = \emptyset$. We kunnen nu $V(\phi)$ *uitrekenen* door middel van de volgende inductieve waarheidsdefinitie:

    - $V(\neg\phi) = \overline{V(\phi)}$
    - $V(\phi \wedge \psi) = V(\phi) \cap V(\psi))$

- $V(\phi \vee \psi) = V(\phi) \cup V(\psi)$
- $V(\phi \to \psi) = \overline{V(\phi)} \cup V(\psi))$

Merk op dat $\overline{V(\phi)} \cup V(\psi)) = \{\emptyset\}$ dan en slechts dan $V(\phi) \subseteq V(\psi)$ (ga na).

16. Gegeven bovenstaande waarheidsdefinitie kunnen we dan de volgende *waarheidstafels* voor de connectieven $\neg$, $\wedge$, $\vee$, and $\to$ afleiden (1 staat voor $\{\emptyset\}$ en 0 voor $\emptyset$):

ϕ	$\neg\phi$
1	0
0	1

ϕ	ψ	$\phi \wedge \psi$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

ϕ	ψ	$\phi \vee \psi$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

ϕ	ψ	$\phi \to \psi$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

17. Bovenstaande interpretaties van de waarheidswaarden en de logische operatoren zijn *Boolse algebras* (zie Boek, hoofdstuk 12, voorbeeld 12.2, blz. 175.). Stone's representatie stelling zegt ons dat elke Boolse algebra "eigenlijk" een verzameling van verzamelingen is en de Boolse operatoren"eigenlijk" staan voor de standaard operaties op verzamelingen: vereniging, doorsnede en complement.

5 Aantekeningen bij 12/03

1. Voor het bewijs van de *Adequaatheidsstelling* (Boek: STELLING 3.1, Sectie 3.4) definieren we de geldigheid van een sequent

$$\phi_1, \ldots, \phi_n \circ \psi_1, \ldots, \psi_k$$

als

$$\phi_1, \ldots, \phi_n \models \psi_1 \vee \ldots \psi_k$$

M.a.w., een sequent $\phi_1, \ldots, \phi_n \circ \psi_1, \ldots, \psi_k$ is geldig als elke valuatie voor de formules $\phi_1, \ldots, \phi_n$ ook een valuatie is voor minstens één van de formules $\psi_1, \ldots, \psi_k$. Bijvoorbeeld

$$p \vee q \circ p, q \text{ en } p \to q \circ \neg p, q$$

zijn geldige sequenten. De sequent $p \circ q$ is *niet* geldig.

2. Notatie: Met $\Phi \models \Psi$ geven we aan dat de sequent $\Phi \circ \Psi$ geldig is.

3. We kunnen nu bewijzen dat de tableau-regels *correct* zijn in de volgende zin. Voor elke regel van de vorm

$$\begin{array}{ccc} \Phi & \circ & \Psi \\ & | & \\ \Phi' & \circ & \Psi' \end{array}$$

geldt: $\Phi \models \Psi$ dan en slechts dan $\Phi' \models \Psi'$. Voor elke regel van de vorm

$$\begin{array}{ccc} & \Phi \circ \Psi & \\ \swarrow & & \searrow \\ \Phi_1 \circ \Psi_1 & & \Phi_2 \circ \Psi_2 \end{array}$$

geldt $\Phi \models \Psi$ dan en slechts dan $\Phi_1 \models \Psi_1$ *en* $\Phi_2 \models \Psi_2$.

4. We behandelen hier de regel $\neg_{\mathrm{L}}$:

$$\begin{array}{ccc} \Phi, \neg\alpha & \circ & \Psi \\ & | & \\ \Phi & \circ & \Psi, \alpha \end{array}$$

Stel eerst dat $\Phi, \neg\alpha \models \Psi$. Laat V een valuatie zijn voor de formules Φ. We moeten dus laten zien dat V een valuatie is voor α, Ψ. Stel dat V *geen* valuatie is voor α, d.w.z., $V(\neg\alpha) = 1$. Dan volgt direkt uit $\Phi, \neg\alpha \models \Psi$ dat V een valuatie is voor Ψ.

Stel vervolgens dat $\Phi \models \alpha, \Psi$. Laat V een valuatie zijn voor de formules $\Phi, \neg\alpha$. Aangezien V dus een valuatie is voor Φ, volgt direkt uit $\Phi \models \alpha, \Psi$ dat V een valuatie is voor α, Ψ. Maar V maakt α niet waar, dus moet V minstens één van de formules van Ψ waar maken.

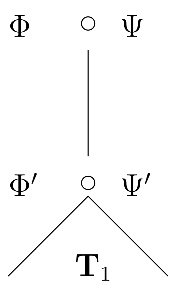
5. Gegeven de correctheid van de tableau-regels kunnen we nu de volgende stelling bewijzen.

   > Voor elke tableau $\mathbf{T}$ voor een sequent $\Phi \circ \Psi$ geldt dat $\mathbf{T}$ sluit dan de sequent $\Phi \models \Psi$ geldig is.

6. We bewijzen dit met inductie naar het aantal sequenten dat in de tableau $\mathbf{T}$ voor $\Phi \circ \Psi$ voorkomt.

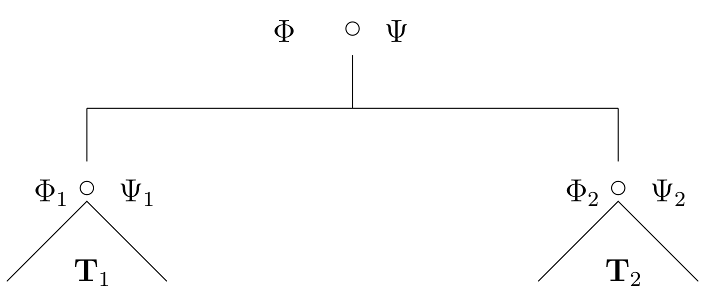
   Basis-stap De tableau $\mathbf{T}$ voor de sequent $\Phi \circ \Psi$ bestaat uit één sequent, de sequent zelf. De sequent $\Phi \circ \Psi$ bestaat dus alleen maar uit propositieletters. Aangezien de tableau $\mathbf{T}$ sluit moet er dus een propositieletter p zijn die zowel in Φ als Ψ voorkomt. Dus $\Phi \models \Psi$.

   Inductie-stap We onderscheiden de volgende twee gevallen. De tableau $\mathbf{T}$ voor de sequent $\Phi \circ \Psi$ is van de vorm



   Er geldt dat $\mathbf{T}$ sluit dan en slechts dan $\mathbf{T}_1$ sluit. De tableau $\mathbf{T}_1$ bevat één sequent minder, dus volgt uit de inductie-hypothese dat $\mathbf{T}_1$ sluit dan en slechts dan $\Phi' \models \Psi'$. Uit de correctheid van de tableau-regels volgt dat $\Phi \models \Psi$ dan en slechts dan $\Phi' \models \Psi'$. Conclusie: $\mathbf{T}$ sluit dan en slechts dan $\Phi \models \Psi$.

   Laat vervolgens de tableau $\mathbf{T}$ voor de sequent $\Phi \circ \Psi$ van de volgende vorm zijn



De tableaus $\mathbf{T}_1$ en $\mathbf{T}_2$ sluiten dan en slechts dan $\mathbf{T}$ sluit. Beide tableaus $\mathbf{T}_1$ en $\mathbf{T}_2$ bevatten één sequent minder dan de tableau voor $\Phi \circ \Psi$, dus volgt uit de inductiehypothese dat $\Phi_1 \models \Psi_1$ en $\Phi_2 \models \Psi_2$. Uit de correctheid van de tableau-regels volgt $\Phi \models \Psi$ dan en slechts dan $\Phi_1 \models \Psi_1$ en $\Phi_2 \models \Psi_2$. Conclusie: $\mathbf{T}$ sluit dan en slechts dan $\Phi \models \Psi$.

6 Aantekeningen bij 23-04

1. Een propositionele formule in *conjunctieve normaalvorm* is een conjunctie van disjuncties. Bijvoorbeeld:
$$(p_1 \vee p_2) \wedge \neg p_3 \wedge (p_4 \wedge \neg p_2)$$
.

2. Een *literal* is een propositieletter p of een negatie $\neg p$ van een propositieletter p.

3. We representeren een disjunctie van literals als een verzameling. Voorbeeld: de verzameling $\{p, \neg q\}$ representeert de disjunctie $(p \vee \neg q)$.

4. Een verzameling van literals noemen we een *clause*. De lege clause duiden we aan met $\square$. Merk op dat de lege clause een *inconsistente* formule reprsenteert (een formule die geen model heeft).

5. Bovenstaande formule in conjunctieve normaalvorm kunnen we dan ook weergeven als de volgende verzameling van clauses:
$$\{\{p_1, p_2\}, \{\neg p_3\}, \{p_4, \neg p_2\}\}.$$
Om te testen of een formula in conjunctieve normaalvorm inconsistent is, d.w.z., geen model heeft, introduceren we de methode van *propositionele resolutie*: Gegeven twee clauses C_1 en C_2 met $p \in C_1$ en $\neg p \in C_2$ genereert een resolutiestap de *resolvent*
$$(C_1 \setminus \{p\}) \cup (C_2 \setminus \{\neg p\}).$$
Voorbeeld: een resolvent van de clauses $\{\neg p, q\}$ en $\{p, \neg q\}$ is $\{q, \neg q\}$. Merk op dat $\{p, \neg p\}$ een andere resolvent is.

6. Laat V een valuatie zijn en C een clause, we schrijven $V \models C$ als er een literal $l \in C$ bestaat zodat $V \models l$. Voorbeeld: laat $V(p) = 0$ dan $V \models \{\neg p, q\}$.

7. Laat C een resolvent zijn van de clauses C_1 en C_2. Bewijs dat als $V \models C_1$ en $V \models C_2$ dan ook $V \models C$.

8. Om te testen of een formule in conjunctieve normaalvorm inconsistent is maken we er een verzameling van clauses van en proberen uit deze verzameling met behulp van resolutie de lege clause af te leiden. Voorbeeld: om te testen of de formule
$$(p \vee q) \wedge \neg p \wedge \neg q$$

inconsistent is passen we de methode van resolutie toe op de verzameling clauses

$$\{\{p, q\}, \{\neg p\}, \{\neg q\}\}$$

Daar gaan we dan: een resolvent van $\{p, q\}$ en $\{\neg p\}$ is $\{q\}$ en de resolvent van $\{\neg p\}$ en $\{q\}$ is $\Box$ (de lege clause).

7 Extra opgaven

1. Laat zien dat de verzameling $\{0, 1\}$ van de getallen 0 en 1, met de binaire operaties $max(x, y)$ en $min(x, y)$, en de unaire operatie $1 - x$, een Boolse algebra is.

2. Bewijs de correctheid van de tableau-regels $\neg_R$ en $\vee_L$.

3. Bewijs met propositionele resolutie dat

$$p \to (q \to r) \models q \to (p \to r)$$

   D.w.z., genereer eerst de conjunctieve normaalvorm van de aanname en de negatie van de conclusie, en pas vervolgens resolutie toe op de corresponderende verzameling clausules.

4. De volgende clausules

$$\begin{array}{l} Som(0, x, x) \leftarrow \\ Som(Sx, y, Sz) \leftarrow Som(x, y, z) \end{array}$$

   definiëren de optelling. Hier is S een 1-plaatsige functiesymbool (de successor functie) en 0 een individuele constante (welke staat voor "nul"). Geef een berekening van het doel

$$\leftarrow Som(S0, S0, z)$$

8 Proeftentamens

Proeftentamen I (10-03-2010)

1. Formules van de propositielogica in *postfix notatie* worden als volgt gedefinieerd:

   (a) elke propositieletter is een formule;

   (b) als ϕ en ψ formules zijn dan ook $\phi\ \neg$, $\phi\ \psi\ \wedge$, $\phi\ \psi\ \to$, $\phi\ \psi\ \leftrightarrow$.

   Geef een inductieve definitie van een vertaling T die elke formule ϕ van de propositielogica in *infix* notatie (zoals gedefinieerd in het boek) vertaalt in een formule $T(\phi)$ in postfix notatie, en pas deze toe op $((p \wedge q) \to r)$.

2. Ga na of de logische gevolgtrekking

$$p \to (q \to r) \models (p \to q) \to r$$

geldig is door gebruik te maken van semantische tableaus. Indien mogelijk, geef een tegenvoorbeeld.

3. Een sequent $\Phi \circ \Psi$ is geldig, notatie $\Phi \models \Psi$, als elk model van de verzameling formules Φ een formule uit Ψ waar maakt.

   (a) Ga na of

      i. $\{p \vee q\} \models \{p\}$,
      ii. $\{p \vee q\} \models \{p, q\}$,
      iii. $\{p, \neg p\} \models \emptyset$.

   (b) Bewijs dat

   $$\Phi \cup \{\neg\phi\} \models \Psi \text{ dan en slechts dan } \Phi \models \Psi \cup \{\phi\}.$$

Proeftentamen II (28-04-2010)

1. Gegeven het domein van mensen introduceren we het binaire prdikaat symbool $R(x, y)$ voor 'x is ouder van y', en het één-plaatsig predikaatsymbool $P(x)$, voor 'x is van het vrouwelijk geslacht'. Geef predikaatlogische formules voor de volgende beweringen:

   (a) Er zijn ouders die alleen dochters hebben.
   (b) Er zijn mensen die geen kinderen hebben.
   (c) Er zijn kinderen die geen broers of zusters hebben.

2. Druk met behulp van een predikaatlogische formule uit dat de interpretatie van de één-plaatsige predikaatsymbolen P en Q een *partitie* van het domein vormen, d.w.z.,

   - $I(P) \cap I(Q) = \emptyset$
   - $I(P) \cup I(Q) = D$.

3. Test met behulp van een semantische tableau de geldigheid van de volgende prekaatlogische beweringen

   (a) $\forall x(Ax \to Aa) \to ((\exists x Ax) \to Aa)$
   (b) $\forall x(Aa \to Ax) \to (Aa \to \forall x Ax)$