Proeftentamen LAI (tweede deel), voorjaar 2006

1. Laat zien: als R een transitieve relatie op A is, dan is R^2 (dat wil zeggen $R \circ R$) ook transitief. Laat vervolgens zien dat heel algemeen geldt: als R transitief is, dan R^n ook, voor elk natuurlijk getal n.

2. Laat R een relatie zijn op A. Volgt uit het feit dat R^2 transitief is dat R transitief is? Geef een bewijs of een tegenvoorbeeld.

3. Laat zien: de totale relatie op A (dat wil zeggen de relatie $A \times A$ van *alle* paren van elementen uit A) is een equivalentie.

4. Hoe ziet de reflexief transitieve afsluiting van de *lege* relatie op A er uit?

5. Geef de transitieve afsluiting van de volgende relatie:

$$\{(1,2),(2,3),(3,4),(5,6)\}.$$

6. Geef de euclidische afsluiting van de volgende relatie:

$$\{(1,2),(2,3),(3,4),(5,6)\}.$$

7. Waarom is de volgende implementatie van de euclidische afsluiting van een relatie correct (`Rel a` is het type van lijsten van paren over `a`, `lfp` is de implementatie van de kleinste dekpuntsoperatie, `@@` is the implementatie van relatie-compositie, en `cnv` geeft de converse van een relatie, alles zoals op college gegeven):

```
ec :: Ord a => Rel a -> Rel a
ec r = lfp (\ s -> (sort.nub) (s ++ (cnv s @@ s))) r
```

8. Een operatie f op verzamelingen heet een *afsluitingsoperatie* (E: closure operation) als f voldoet aan de volgende eisen:

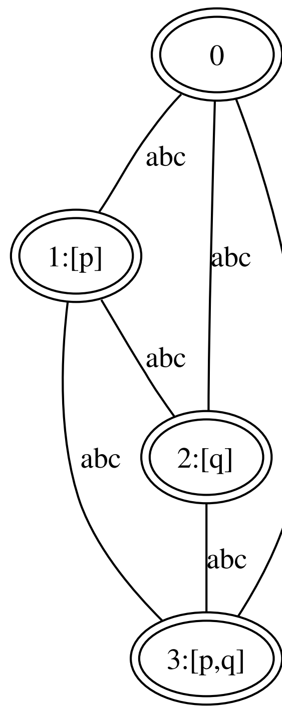
   (a) $A \subseteq f(A)$

   (b) als $A \subseteq B$ dan $f(A) \subseteq f(B)$

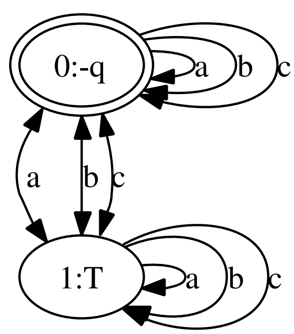
   (c) $f(f(A)) \subseteq f(A)$

   waarbij A en B verzamelingen zijn en $\subseteq$ staat voor inclusie van verzamelingen. Laat zien dat * (reflexief-transitieve afsluiting van relaties) een afsluitingsoperatie is in de zin van deze definitie.

9. Beschouw het volgende epistemische model:



(a) Reken uit wat het resultaat is van update met het volgende actiemodel:



(b) Geef de bisimulatie-minimale versie.

10. Een operatie f is idempotent als $f(f(x)) = f(x)$, voor elke x. Is het in het algemeen zo dat updaten met een actiemodel een idempotente operatie is? Met andere woorden: geldt voor alle actiemodellen $\mathbf{A}$ en alle epistemische modellen $\mathbf{M}$ dat $(\mathbf{M} \otimes \mathbf{A}) \otimes \mathbf{A} = \mathbf{M} \otimes \mathbf{A}$? Geef een bewijs of een tegenvoorbeeld.