

**Proeftentamen LAI (tweede deel), voorjaar 2006 — Uitwerkingen**

1. Laat zien: als  $R$  een transitieve relatie op  $A$  is, dan is  $R^2$  (dat wil zeggen  $R \circ R$ ) ook transitief. Laat vervolgens zien dat heel algemeen geldt: als  $R$  transitief is, dan  $R^n$  ook, voor elk natuurlijk getal  $n$ .

Antwoord:

Gegeven:  $R$  is transitief.

Te bewijzen:  $R^2$  is transitief.

Bewijs: Laat  $(x, y) \in R^2$ ,  $(y, z) \in R^2$ . We moeten laten zien dat  $(x, z) \in R^2$ .

Uit  $(x, y) \in R^2$  volgt met transitiviteit van  $R$  dat  $(x, y) \in R$ . Uit  $(y, z) \in R^2$  volgt met transitiviteit van  $R$  dat  $(y, z) \in R$ . Maar dan zit  $(x, z) \in R^2$  volgens de definitie van  $R^2$ .

Nu algemeen. Voor  $n = 0$  is de bewering waar, want  $R^0 = I$  is transitief. Voor  $n = 1$  ook, want het is gegeven dat  $R^1 = R$  transitief is. Veronderstel dus dat  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n > 1$ . Neem aan dat  $(x, y) \in R^n$  en  $(y, z) \in R^n$ . We moeten laten zien:  $(x, z) \in R^n$ .

Uit  $(x, y) \in R^n$  volgt met transitiviteit van  $R$  (nu in  $n$  stappen) dat  $(x, y) \in R$ . Uit  $(y, z) \in R^n$  volgt met transitiviteit van  $R$  dat  $(y, z) \in R^{n-1}$ . Uit  $(x, y) \in R$  en  $(y, z) \in R^{n-1}$  volgt dat  $(x, z) \in R^n$ .

2. Laat  $R$  een relatie zijn op  $A$ . Volgt uit het feit dat  $R^2$  transitief is dat  $R$  transitief is? Geef een bewijs of een tegenvoorbeeld.

Antwoord:

Hier is een tegenvoorbeeld:

$$R = \{(1, 2), (2, 3)\}.$$

Merk op dat  $R^2$  gelijk is aan  $\{(1, 3)\}$ , en deze relatie is zeker transitief. Maar  $R$  zelf is niet transitief.

3. Laat zien: de totale relatie op  $A$  (dat wil zeggen de relatie  $A \times A$  van *alle* paren van elementen uit  $A$ ) is een equivalentie.

Antwoord:

We moeten drie eigenschappen controleren.

$A \times A$  is reflexief, want  $\{(x, x) \mid x \in A\} \subseteq A \times A$ .

$A \times A$  is symmetrisch, want elk paar zit erin, dus als  $(x, y)$  erin zit, dan zeker ook  $(y, x)$ .

$A \times A$  is transitief, want elk paar zit erin. Dus zeker voor elke  $(x, y)$  en  $(y, x)$  ook  $(x, z)$ .

4. Hoe ziet de reflexief transitieve afsluiting van de *lege* relatie op  $A$  er uit?

Antwoord:

$$(\emptyset)^* = \{(x, x) \mid x \in A\}.$$

5. Geef de transitieve afsluiting van de volgende relatie:

$$\{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (5, 6)\}.$$

Antwoord:

$$\{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4), (5, 6)\}.$$

6. Geef de euclidische afsluiting van de volgende relatie:

$$\{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (5, 6)\}.$$

Antwoord:

$$\{(1, 2), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (5, 6), (6, 6)\}.$$

7. Waarom is de volgende implementatie van de euclidische afsluiting van een relatie correct (`Rel a` is het type van lijsten van paren over `a`, `lfp` is de implementatie van de kleinste dekpuntsoperatie, `@@` is the implementatie van relatie-compositie, en `cnv` geeft de converse van een relatie, alles zoals op college gegeven):

```
ec :: Ord a => Rel a -> Rel a
ec r = lfp (\ s -> (sort.nub) (s ++ (cnv s @@ s))) r
```

Antwoord: Op het college is bewezen dat een relatie  $R$  euclidisch is precies wanneer  $R \circ R \subseteq R$ . De kleinste dekpuntoperatie, startend vanaf  $R$ , levert de kleinste relatie  $S$  die voldoet aan  $R \subseteq S$  en  $S \circ S \subseteq S$ . Per definitie is dit de euclidische afsluiting van  $R$ .

8. Een operatie  $f$  op verzamelingen heet een *afsluitingsoperatie* (E: closure operation) als  $f$  voldoet aan de volgende eisen:

- (a)  $A \subseteq f(A)$
- (b) als  $A \subseteq B$  dan  $f(A) \subseteq f(B)$
- (c)  $f(f(A)) \subseteq f(A)$

waarbij  $A$  en  $B$  verzamelingen zijn en  $\subseteq$  staat voor inclusie van verzamelingen. Laat zien dat  $*$  (reflexief-transitieve afsluiting van relaties) een afsluitingsoperatie is in de zin van deze definitie.

Antwoord:

We checken de drie condities.

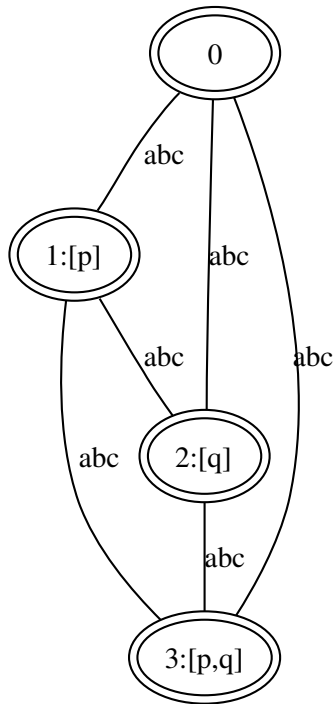
- (a)  $R \subseteq R^*$ . Hier is zeker aan voldaan.
- (b) Als  $R \subseteq S$  dan  $R^* \subseteq S^*$ .

Neem aan dat  $R \subseteq S$ . We laten zien dat  $R^* \subseteq S^*$ .

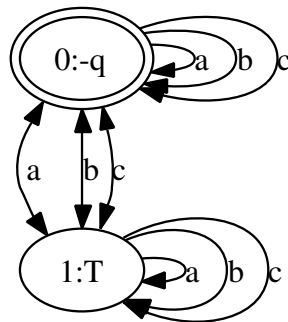
Laat  $(x, y) \in R^*$ . Dan is er een  $n \in \mathbb{N}$  met  $(x, y) \in R^n$ . Dus er zijn  $z_1, \dots, z_{n-1}$  met  $(x, z_1) \in R, \dots, (z_{n-1}, y) \in R$ . Omdat  $R \subseteq S$  volgt hieruit dat  $(x, z_1) \in S, \dots, (z_{n-1}, y) \in S$ . Dus  $(x, y) \in S^n$ , dat wil zeggen  $(x, y) \in S^*$ .

(c)  $(R^*)^* \subseteq R^*$ . Omdat  $R^*$  reflexief en transitief is, en de  $*$  operatie de kleinste reflexieve en transitieve relatie oplevert die  $R^*$  omvat, geldt dat  $(R^*)^* = R^*$ .

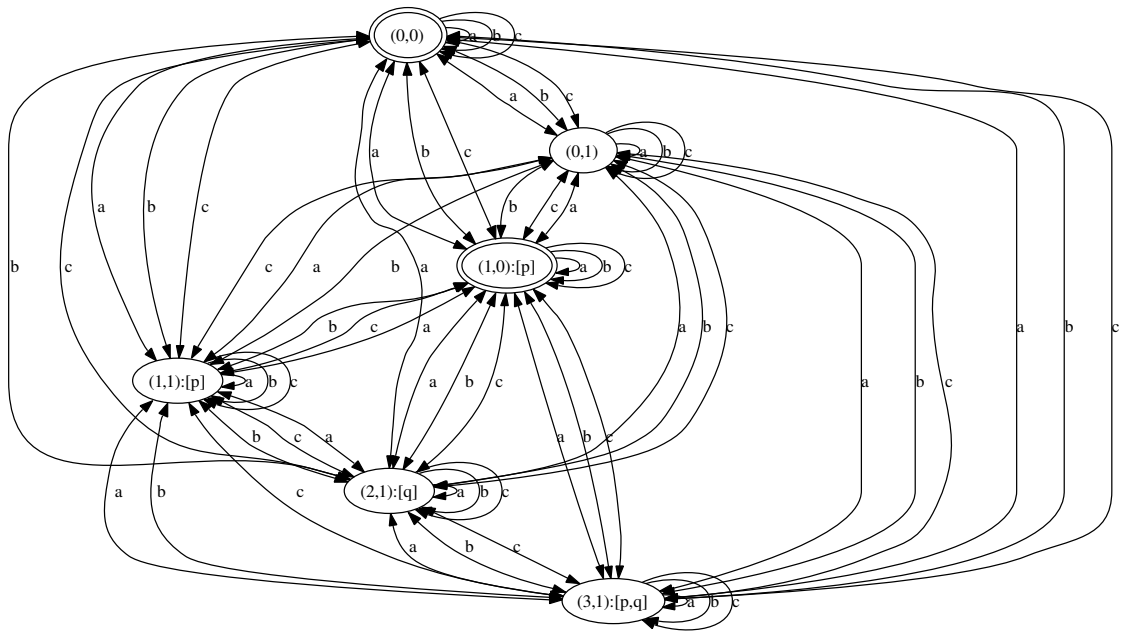
9. Beschouw het volgende epistemische model:



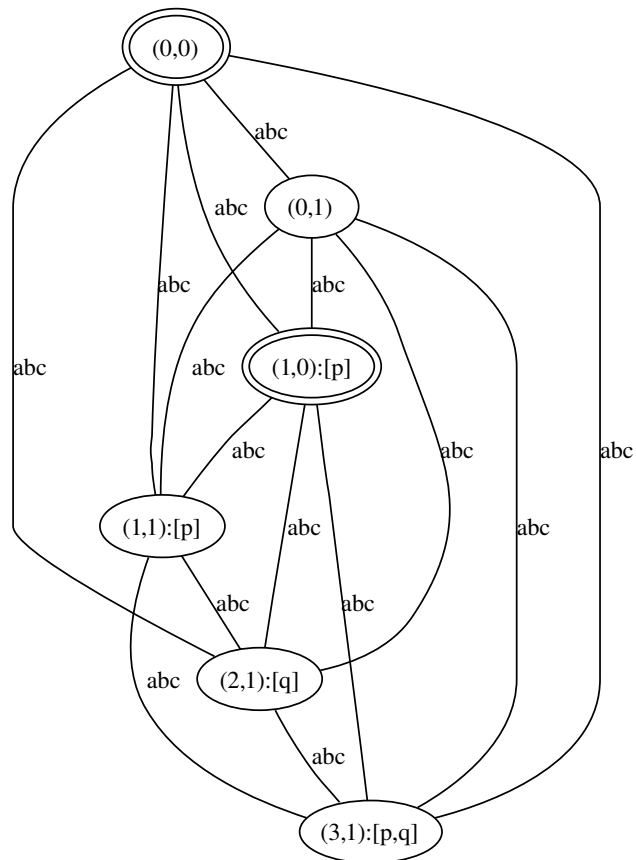
(a) Reken uit wat het resultaat is van update met het volgende actiemodel:



Antwoord:

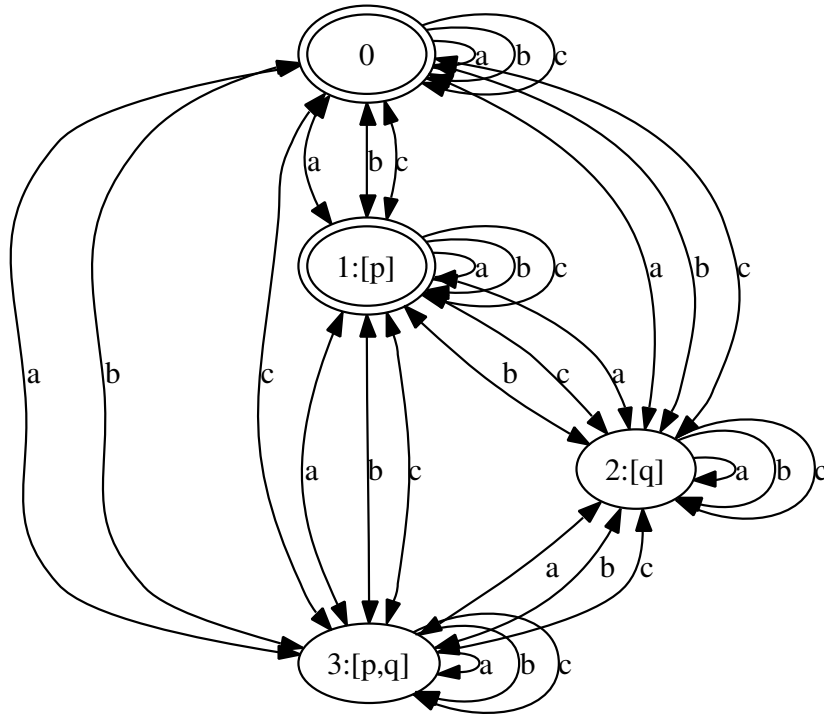


In compactere notatie:

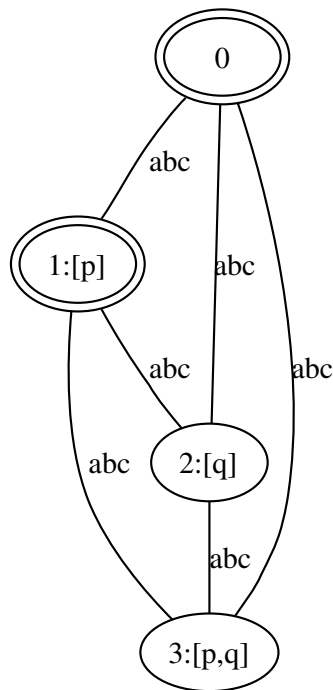


(b) Geef de bisimulatie-minimale versie.

Antwoord:



In compactere notatie:



10. Een operatie  $f$  is idempotent als  $f(f(x)) = f(x)$ , voor elke  $x$ . Is het in het algemeen zo dat updaten met een actiemodel een idempotente operatie is? Met ande-

re woorden: geldt voor alle actiemodellen  $\mathbf{A}$  en alle epistemische modellen  $\mathbf{M}$  dat  $(\mathbf{M} \otimes \mathbf{A}) \otimes \mathbf{A} = \mathbf{M} \otimes \mathbf{A}$ ? Geef een bewijs of een tegenvoorbeeld.

Antwoord:

De operatie van updaten met hetzelfde actiemodel is niet idempotent. Een tegenvoorbeeld (al eerder op een werkcollege aan de orde geweest) is een epistemisch model waar  $p$  waar is, maar  $a$  weet dat niet. In dat model is  $p \wedge \neg K_a p$  dus waar.

Na een eerste public announcement van  $p \wedge \neg K_a p$  is  $K_a p$  waar geworden. Immers, we hebben  $p$  publiek geannonceerd, en iedereen weet dit nu, dus ook  $a$ . Bij een *tweede* publieke announcement van  $p \wedge \neg K_a p$  is het resultaat een inconsistent model (een model zonder actuele werelden). Immers, we hebben nu iets publiek geannonceerd dat onwaar is, en dat leidt altijd tot inconsistentie.

Dit voorbeeld toont aan dat de tweede update met  $p \wedge \neg K_a p$  de situatie nogmaals verandert: de operatie van updaten met hetzelfde actiemodel is dus niet idempotent.