

## Proeftentamen Taal, Wiskunde, Logica: Uitwerking

**Vraag 1** In het college hebben we gezien dat als  $A$  eindig is, dan is  $A^*$ , de verzameling van alle eindige rijtjes van elementen van  $A$ , aftelbaar oneindig. Hoe kun je inzien dat dit zo is?

**Antwoord.** Voor elke  $n$  is het aantal rijtjes van lengte  $n$  eindig. Je kunt dus eerst het lege rijtje nemen, dan alle rijtjes van lengte 1, vervolgens alle rijtjes van lengte 2, enzovoort. Elk eindig rijtje over  $A$  komt zo een keer aan de beurt, dus  $A^*$  is aftelbaar.

**Vraag 2** Stel dat  $A$  eindig is. Beschouw de verzameling  $A^\infty$  van alle *oneindige* rijtjes van elementen uit  $A$ . Is deze verzameling aftelbaar oneindig of overaftelbaar? Waarom?

**Antwoord.** Deze verzameling is overaftelbaar. Dat kunnen we inzien met Cantor's diagonaalargument. Stel dat de verzameling aftelbaar oneindig is. Dan kun je alle oneindige rijtjes onder elkaar zetten (opsommen) in een oneindige lijst. Vervolgens construeer je een nieuw oneindig rijtje dat van het eerste rijtje uit de opsomming verschilt in het eerste element, van het tweede rijtje uit de opsomming in het tweede argument, enzovoorts. Dit geeft een rijtje dat gegarandeerd niet in de opsomming voorkomt, en dus een tegenspraak met de aanname dat de opsomming alle oneindige rijtjes bevat.

**Vraag 3**  $A$  is een verzameling van vijf elementen. Hoe groot is  $A \times A$ ?

**Antwoord.** Als  $A$  vijf elementen heeft, dan heeft  $A \times A$   $5 \times 5 = 25$  elementen.

**Vraag 4** Een binaire relatie op  $A$  is een deelverzameling van  $A \times A$ . Neem weer aan dat  $A$  een verzameling is van 5 elementen. Hoeveel verschillende binaire relaties op  $A$  zijn er?

**Antwoord.** Omdat  $A \times A$  25 elementen heeft, zijn er  $2^{25}$  deelverzamelingen. Er zijn dus  $2^{25}$  verschillende binaire relaties op  $A$ .

**Vraag 5** Geef een contextvrije grammatica die in elk geval de volgende zinnen kan genereren:

1. Hillary respecteert Barack
2. Barack verslaat Hillary
3. Barack wordt door geen vrouw verslagen
4. Een man verslaat een vrouw die hij respecteert
5. Een man verslaat een vrouw die hem respecteert
6. Elke man die Hillary verslaat wordt door Bill veracht (twee lezingen).

Geef aan hoe het verschil ontstaat tussen de twee lezingen van de laatste zin.

**Antwoord.** Dit is een variatie op het Engelse fragment dat we op college besproken hebben. Nederlands is alleen iets ingewikkelder. De extra complicaties zijn: (i) het onderscheid tussen subject- en object-NPs, en (ii) het feit dat in het Nederlands de woordvolgorde in bijzinnen verschilt van die in hoofdzinnen. Verder moet een constructie voor passieve zinnen worden toegevoegd. Hier is een mogelijke oplossing:

S  $\rightarrow$  SNP VP  
 VP  $\rightarrow$  TV ONP | wordt door ONP PART  
 PART  $\rightarrow$  verslagen | veracht | gehaat  
 TV  $\rightarrow$  haat | veracht | respecteert  
 SNP  $\rightarrow$  hij | zij | NP  
 ONP  $\rightarrow$  hem | haar | NP  
 NP  $\rightarrow$  Bill | Hillary | Barack | DET RCN  
 DET  $\rightarrow$  een | de | elke | geen  
 RCN  $\rightarrow$  CN | CN die SNP TV | CN die ONP TV | CN die door ONP wordt PART  
 CN  $\rightarrow$  man | vrouw

De dubbelzinnigheid van ‘Elke man die Hillary verslaat wordt door Bill veracht’ wordt veroorzaakt door het feit dat ‘man die Hillary verslaat’ op twee manieren kan worden geconstrueerd: met behulp van de regel  $RCN \rightarrow CN \text{ die } SNP \text{ TV}$  en met behulp van de regel  $RCN \rightarrow CN \text{ die } ONP \text{ TV}$ .

**Vraag 6** Beschouw nog eens de voorbeeldzinnen uit de vorige opgave. Laat een predikatenlogische taal gegeven zijn met eigennamen  $h$ ,  $b_1$ ,  $b_2$  (waarbij  $h$  staat voor Hillary,  $b_1$  voor Barack, en  $b_2$  voor Bill), met eenplaatsige predikaten  $M$  en  $F$  (waarbij  $M$  staat voor man zijn en  $F$  voor vrouw zijn), en met tweeplaatsige predikaten  $R$ ,  $H$ ,  $D$ ,  $B$  (waarbij  $R$  staat voor respecteren,  $H$  voor haten,  $D$  voor verachten en  $B$  voor verslaan). Vertaal elk van de bovenstaande zinnen in een predikatenlogische formule die de betekenis juist weergeeft. Let op: de laatste zin krijgt twee vertalingen (voor elke lezing een).

**Antwoord.**

1. Hillary respecteert Barack:  $Rhb_1$ .
2. Barack verslaat Hillary:  $Bb_1h$ .
3. Barack wordt door geen vrouw verslagen:  $\neg\exists x(Fx \wedge Bxb_1)$ .
4. Een man verslaat een vrouw die hij respecteert:  $\exists x(Mx \wedge \exists y(Fy \wedge Rxy \wedge Bxy))$ .
5. Een man verslaat een vrouw die hem respecteert:  $\exists x(Mx \wedge \exists y(Fy \wedge Ryx \wedge Bxy))$ .
6. Elke man die Hillary verslaat wordt door Bill veracht (twee lezingen):
  - (1)  $\forall x((Mx \wedge Bxh) \rightarrow Db_2x)$
  - (2)  $\forall x((Mx \wedge Bhx) \rightarrow Db_2x)$ .