

Inhoudsopgave

- *Verzamelingen*
element, Venn-diagram, singleton, lege verzameling, gelijkheid, deelverzameling, machtsverzameling, vereniging, doorsnede, verschilverzameling
- *Relaties*
geordend paar, cartesisch product, binaire relatie, inverse, functie, domein, bereik, karakteristieke functies
- *Haskell*
lijsten, types

Verzamelingen: Verzameling

- *Voorbeeld 1*

$$K = \{ a, e, i, o, u, y \}$$

$$K = \{ x \mid x \text{ kan een klinker aanduiden} \}$$

- *Voorbeeld 2*

$$P = \{ 2, 3, 5, 7, 11, \dots \}$$

$$P = \text{de verzameling priemgetallen}$$

- *Voorbeeld 3*

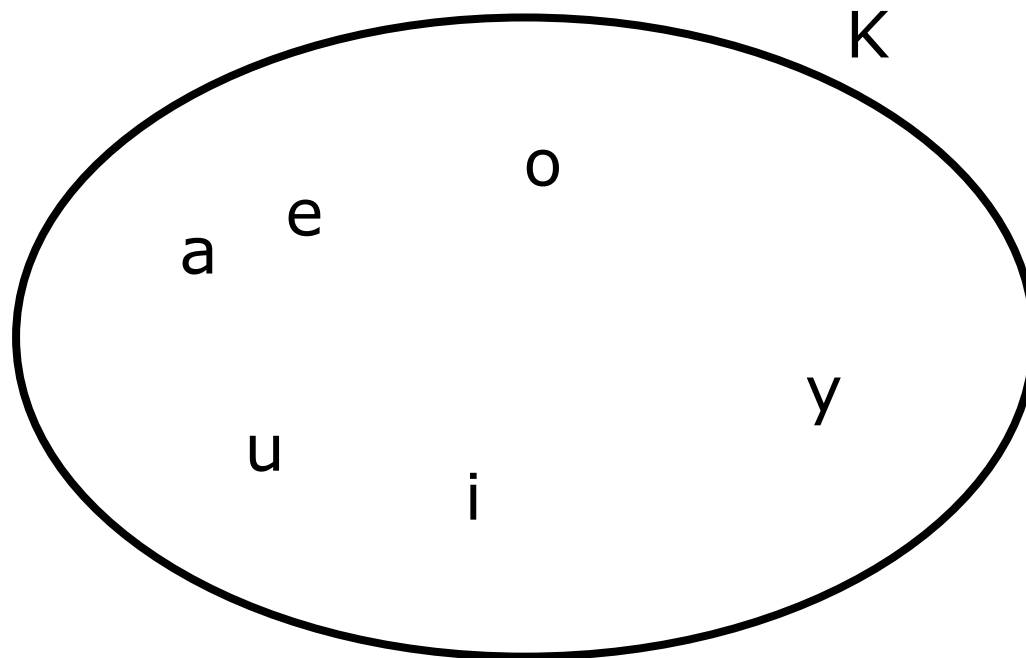
$$R = \{ \text{Rouvoet, Middelkoop} \}$$

$$R = \{ x \mid x \text{ is een minister van de CU} \}$$

Verzamelingen: Element

- Een verzameling bestaat uit **elementen**.
- $x \in A$ betekent: x is een element van A .
 $x \notin A$ betekent: x is geen element van A .
- Voorbeelden
 - $a \in \{ a, e, i, o, u, y \}$
 - $13 \in \{ x \mid x \text{ is een priemgetal} \}$
 - $\text{Huizinga} \notin \mathbb{R}$

Verzamelingen: Venn-diagrammen



Verzamelingen: Soorten

- Een verzameling kan uit 1 element bestaan (een **singleton**): $\{ \text{Huizinga} \}$
- Een verzameling kan **oneindig** veel elementen hebben: de verzameling priemgetallen.
- De **lege verzameling** (\emptyset) is de verzameling zonder elementen: $\{ x \mid x \text{ is een vierkante cirkel} \} = \emptyset$
- Een verzameling kan andere verzamelingen als element hebben: $\{ \{ \clubsuit, \spadesuit \}, \{ \diamond, \heartsuit \} \}$

Verzamelingen: Identiteit

- Twee verzamelingen zijn **gelijk** als ze dezelfde elementen hebben.
- *Voorbeelden*
 - $\{b\} = \{x \mid x \text{ is bilabiaal, plosief en stemhebbend}\}$
 - $\{a, e, i, o, u\} = \{u, o, i, e, a\} = \{u, a, a, e, i, o, i\}$
 - $\{x \mid x \text{ is een vierkante cirkel}\} = \{y \mid y \neq y\}$
- *Opmerkingen*
 - Er is één lege verzameling.
 - Volgorde speelt geen rol in verzamelingen.
 - Elk element komt maar één keer voor.

Verzamelingen: Deelverzameling

- $A \subseteq B$, A is een **deelverzameling** van B , als voor elke $x \in A$ geldt $x \in B$.
- *Voorbeelden*
 - $\{ \text{Bos, Kok} \} \subseteq \{ \text{Bos, Kok, Drees} \}$
 - Friezen \subseteq Nederlanders
 - Transitieve werkwoorden \subseteq werkwoorden
- *Opmerkingen*
 - Voor elke verzameling X geldt: $X \subseteq X$.
 - Voor elke verzameling X geldt: $\emptyset \subseteq X$.

Verzamelingen: Element versus deelverzameling

■ Welke van de volgende uitspraken zijn waar?

a $\clubsuit \in \{\clubsuit, \spadesuit, \diamondsuit, \heartsuit\}$

b $\{\clubsuit\} \in \{\clubsuit, \spadesuit, \diamondsuit, \heartsuit\}$

c $\clubsuit \subseteq \{\clubsuit, \spadesuit, \diamondsuit, \heartsuit\}$

d $\{\clubsuit\} \subseteq \{\clubsuit, \spadesuit, \diamondsuit, \heartsuit\}$

e $\{\clubsuit, \spadesuit\} \in \{\{\clubsuit, \spadesuit\}, \{\diamondsuit, \heartsuit\}\}$

f $\{\clubsuit, \spadesuit\} \subseteq \{\{\clubsuit, \spadesuit\}, \{\diamondsuit, \heartsuit\}\}$

g $\clubsuit \in \{\{\clubsuit, \spadesuit\}, \{\diamondsuit, \heartsuit\}\}$

h $\{\{\clubsuit, \spadesuit\}\} \subseteq \{\{\clubsuit, \spadesuit\}, \{\diamondsuit, \heartsuit\}\}$

Verzamelingen: Machtsverzameling

- De **machtsverzameling** $\wp(A)$ van een verzameling A is de verzameling van alle deelverzamelingen van A :
$$\wp(A) = \{ X \mid X \subseteq A \}$$
- *Voorbeelden*
 - $\wp(\{0,1\}) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}\}$
 - $\wp(\emptyset) = ?$
 - $\wp(\{a,b,c\}) = ?$
- Als A n elementen heeft, dan heeft $\wp(A)$ 2^n elementen.

Verzamelingen: Vereniging

- $A \cup B$, de **vereniging** van A en B, bestaat uit de elementen die in A of B zitten (**inclusief of**)
d.w.z. $A \cup B = \{ x \mid x \in A \text{ of } x \in B \}$
- *Voorbeelden*
 - $\{ a, b, c, d \} \cup \{ c, d, e \} = \{ a, b, c, d, e \}$
 - $F(\text{unctiewoorden}) = L(\text{idwoorden}) \cup V(\text{oegwoorden}) \cup P(\text{ronomina}) \cup V(\text{oorzetsels})$
- *Vragen*
 - $\{0, 1\} \cup \{0, 1, 2\} = ?$
 - $\{a, b, c\} \cup \{a, b, c\} = ?$

Verzamelingen: Doorsnede

- $A \cap B$, de **doorsnede** van A en B, bestaat uit de elementen die zowel in A als in B zitten
d.w.z. $A \cap B = \{ x \mid x \in A \text{ en } x \in B \}$
- *Voorbeelden*
 - $\{ a, b, c \} \cap \{ c, d \} = \{ c \}$
 - $\{ \text{een} \} = \text{Lidwoorden} \cap \text{Onbepaald}$
- *Vragen*
 - $\{ a, b, c \} \cap \{ d, e \} = ?$
 - $\{ 0 \} \cap \{ 0, 1 \} = ?$

Verzamelingen: Verschilverzameling

- $A \setminus B$, de **verschilverzameling** van A en B, bestaat uit de elementen van A die niet in B zitten
d.w.z. $A \setminus B = \{ x \mid x \in A \text{ en } x \notin B \}$
(andere notatie: $A - B$)
- *Voorbeeld*
 - $\{ a, b, c \} \setminus \{ c, d \} = \{ a, b \}$
- *Vragen*
 - $\emptyset \setminus \{ 1, 2, 3 \} = ?$
 - $\{ 1, 2, 3 \} \setminus \emptyset = ?$
 - $\{ 1, 2, 3 \} \setminus \{ 1, 2, 3 \} = ?$

Relaties: Geordend paar

- Een **geordend paar** is een structuur van twee elementen in een bepaalde volgorde: $\langle a, b \rangle$.
- Verschillen met verzameling:
 - de elementen zijn geordend: $\langle a, b \rangle \neq \langle b, a \rangle$
(Bij verzamelingen: $\{a, b\} = \{b, a\}$.)
 - de elementen kunnen gelijk zijn: $\langle a, a \rangle$
(Bij verzameling: $\{a, a\} = \{a\}$.)
- Er zijn ook geordende drietallen, viertallen, ... n-tallen.

Relaties: Cartesisch product

- Als A en B verzamelingen zijn, dan is het cartesisch product, $A \times B = \{ \langle x, y \rangle \mid x \in A \text{ en } y \in B \}$

- *Voorbeeld*

$$\{a, b, c\} \times \{0, 1\}$$

	a	b	c
0	$\langle a, 0 \rangle$	$\langle b, 0 \rangle$	$\langle c, 0 \rangle$
1	$\langle a, 1 \rangle$	$\langle b, 1 \rangle$	$\langle c, 1 \rangle$

- *Vraag*

- Wat is $\{0, 1\} \times \{0, 1\}$?
- Wat is $\{0, 1\} \times \{0, 1\} \times \{0, 1\}$?

Relaties: Relatie tussen

- Een **binaire relatie** tussen A en B is een deelverzameling van $A \times B$, dus een verzameling geordende paren.

- *Voorbeeld*

$$R = \{\langle a,0 \rangle, \langle b,0 \rangle, \langle b,1 \rangle, \langle c,1 \rangle\}$$

	a	b	c
0	$\langle \mathbf{a}, \mathbf{0} \rangle$	$\langle \mathbf{b}, \mathbf{0} \rangle$	$\langle \mathbf{c}, \mathbf{0} \rangle$
1	$\langle \mathbf{a}, \mathbf{1} \rangle$	$\langle \mathbf{b}, \mathbf{1} \rangle$	$\langle \mathbf{c}, \mathbf{1} \rangle$

- Er zijn ook drie-, vier-, ..., n-plaatsige relaties.

Relaties: Relatie in

- Een **binaire relatie in** A is een deelverzameling van $A \times A$, dus een verzameling geordende paren uit dezelfde verzameling.

- *Voorbeeld*

$C = \{0,1,2\}$, R is de relatie 'kleiner dan of gelijk aan'

	0	1	2
0	$\langle \mathbf{0,0} \rangle$	$\langle 1,0 \rangle$	$\langle 2,0 \rangle$
1	$\langle \mathbf{0,1} \rangle$	$\langle \mathbf{1,1} \rangle$	$\langle 2,1 \rangle$
2	$\langle \mathbf{0,2} \rangle$	$\langle \mathbf{1,2} \rangle$	$\langle \mathbf{2,2} \rangle$

- De relatie R kan ook als **graaf** worden getekend.

Relaties: Meer voorbeelden

- \in is een relatie tussen elementen en verzamelingen.
 \subseteq is een relatie tussen verzamelingen.
 $=$ is een relatie tussen objecten in het algemeen.

- $<$ in zinnen en boomstructuren
Fiona kust de oger
 $W = \{de, Fiona, kust, oger\}$
 $< = \{\langle Fiona, kust \rangle, \langle Fiona, de \rangle, \langle Fiona, oger \rangle, \langle kust, de \rangle, \langle kust, oger \rangle, \langle de, oger \rangle\}$

Relaties: Inverse

- Bij iedere relatie $R \subseteq A \times B$ hoort de **inverse relatie**
 $R^{-1} = \{ \langle x, y \rangle \mid \langle y, x \rangle \in R \}$
- *Voorbeeld*
 - 'moeder' en 'dochter' in boomstructuur
 - < en > in volgorde
- *Vraag*
 - Wat is de inverse relatie van 'zuster' in boomstructuren?

Relaties: Functies

- Functies als een speciaal soort relaties:
Een relatie f tussen A en B is een functie wanneer er voor elke $x \in A$ precies één $y \in B$ is, zodat $\langle x, y \rangle \in f$.
- In plaats van $f \subseteq A \times B$ schrijven we $f: A \rightarrow B$
In plaats van $\langle x, y \rangle \in f$ schrijven we $f: x \rightarrow f(x)$ met $f(x) = y$.
- *Voorbeelden*
 - $f: x \rightarrow \text{leeftijd}(x)$ (voor elke x hier in de zaal)
 - $f: x \rightarrow x^2$ (voor elk reëel getal x)
 - $f: X \rightarrow \wp(X)$

Relaties: Functies

■ *Voorbeeld*

De functie die elke woordgroep in een zin op z'n hoofd **afbeeldt**. Bijvoorbeeld: hoofd(*de langste dag*) = *dag*.
Welke aannames zijn dan noodzakelijk?

■ *Voorbeeld*

De functie die elk letterrijtje afbeeldt op z'n lengte.
Domein: verzameling letterrijtje; **bereik**: natuurlijke getallen.

■ *Vraag*

Is de relatie *buur* ook een functie?

Relaties: Karakteristieke functies

- Een verzameling kan worden voorgesteld als een speciaal soort functie: een functie die aan elementen en niet-elementen de waarden True/False, 1/0 toekent.
- *Voorbeeld*
In plaats van $K = \{a, e, i, o, u, y\}$ hebben we de functie K zodat $K(a) = 1$, $K(b) = 0$, $K(c) = 0$, $K(d) = 0$, $K(e) = 1$, $K(f) = 0$, etc.
- Ook een relatie kan worden voorgesteld als een functie.

Relaties: Karakteristieke functies voor relaties

- Fiona kust de oger
- $W = \{de, Fiona, kust, oger\}$
 $\prec = \{\langle Fiona, kust \rangle, \langle Fiona, de \rangle, \langle Fiona, oger \rangle, \langle kust, de \rangle, \langle kust, oger \rangle, \langle de, oger \rangle\}$
- Twee stappen:
 - 1) \prec kent aan elk woord de verzameling toe van woorden die eraan voorafgaan.
 - 2) Die verzamelingen zijn ook weer functies.

Relaties: Karakteristieke functies voor relaties

■ Fiona kust de oger

■ $W = \{de, Fiona, kust, oger\}$

$< = \{\langle Fiona, kust \rangle, \langle Fiona, de \rangle, \langle Fiona, oger \rangle, \langle kust, de \rangle, \langle kust, oger \rangle, \langle de, oger \rangle\}$

■ $< =$

de	$\rightarrow [de \rightarrow 0, Fiona \rightarrow 1, kust \rightarrow 1, oger \rightarrow 0]$
Fiona	$\rightarrow [de \rightarrow 0, Fiona \rightarrow 0, kust \rightarrow 0, oger \rightarrow 0]$
kust	$\rightarrow [de \rightarrow 0, Fiona \rightarrow 1, kust \rightarrow 0, oger \rightarrow 0]$
ogger	$\rightarrow [de \rightarrow 1, Fiona \rightarrow 1, kust \rightarrow 1, oger \rightarrow 0]$

Haskell: Lijsten

- Lijst: geordende verzameling van objecten
['h','a','s','k','e','l','l']
 - de elementen zijn geordend
 - de elementen mogen meer dan 1 keer voorkomen
 - [] is de **empty list**.
 - Ze kunnen gebruikt worden om verzamelingen te representeren.
- Lijsten zijn recursief opgebouwd uit een **head** en een **tail**: In de lijst [1,2,3] is 1 de head en [2,3] de tail: 1:[2,3], oftewel 1:2:[3], oftewel 1:2:3:[].

Haskell: Types

- Uitdrukkingen in Haskell zijn van een bepaald type.
 - 'h' :: Char
 - ['h','a','s','k','e','l','l'] :: [Char]
 - True :: Bool
- Belangrijk zijn de **functionele types**:
 - not :: Bool -> Bool
 - klinker :: Char -> Bool
 - relation :: Entity -> Entity -> Bool