

## Tentamen Taal, Wiskunde, Logica, 25 juni 2008: Uitwerking

**Vraag 1**  $A$  is een verzameling van vier elementen. Hoeveel drieplaatsige relaties op  $A$  zijn er?

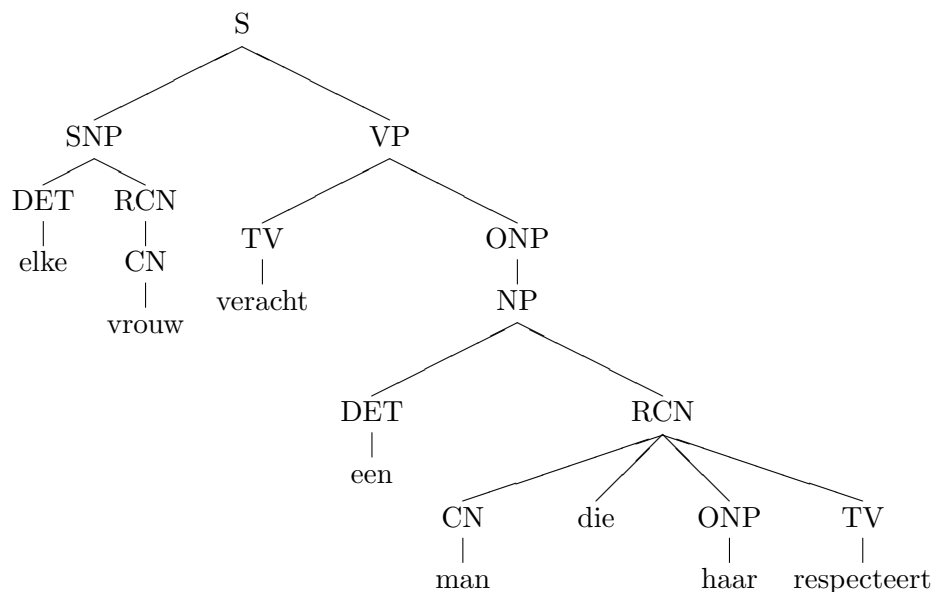
**Antwoord.** De verzameling van alle drietallen van elementen van  $A$  heeft  $4 \times 4 \times 4 = 64$  elementen: je kunt immers kiezen uit vier kandidaten voor de eerste positie, uit vier kandidaten voor de tweede positie, en uit vier kandidaten voor de derde positie. Drieplaatsige relaties op  $A$  zijn deelverzamelingen van de verzameling drietallen. Er zijn er dus  $2^{64}$  van. Dat is heel erg veel (denk aan de keizer van China en het schaakbord met graankorrels).

**Vraag 2** Beschouw de volgende contextvrije grammatica:

$S \rightarrow SNP VP$   
 $VP \rightarrow TV ONP$   
 $TV \rightarrow haat \mid veracht \mid respecteert$   
 $SNP \rightarrow hij \mid zij \mid NP$   
 $ONP \rightarrow hem \mid haar \mid NP$   
 $NP \rightarrow Bill \mid Hillary \mid Barack \mid DET RCN$   
 $DET \rightarrow een \mid de \mid elke \mid geen$   
 $RCN \rightarrow CN \mid CN \text{ die } SNP TV \mid CN \text{ die } ONP TV$   
 $CN \rightarrow man \mid vrouw$

Teken een structuurboom voor “elke vrouw veracht een man die haar respecteert.”

**Antwoord.**



**Vraag 3** *Genereert de grammatica uit de vorige opdracht een eindige of een oneindige taal? Motiveer je antwoord.*

**Antwoord.** De grammatica genereert een oneindige taal. Dit kun je zien aan het feit dat er recursie in zit: een NP kan een RCN bevatten, en die RCN kan zelf weer een NP bevatten. Dit houdt in dat je alle zinnen waarin RCN direct herschrijft tot CN langer kunt maken door die CN te vervangen door “CN die SNP VP”.

**Vraag 4** *Geef twee verschillende predikatenlogische vertalingen voor “elke vrouw veracht een man die elke vrouw respecteert.” Gebruik  $M$  voor man zijn,  $F$  voor vrouw zijn,  $D$  voor verachten, en  $R$  voor respecteren.*

**Antwoord.** In ‘een man die elke vrouw respecteert’ kan ‘een man’ zowel subject als object zijn in de respecteer-relatie. Dit geeft de volgende twee lezingen:

$$\forall x(F(x) \rightarrow \exists y(M(y) \wedge \forall z(F(z) \rightarrow R(y, z)) \wedge D(x, y))).$$

$$\forall x(F(x) \rightarrow \exists y(M(y) \wedge \forall z(F(z) \rightarrow R(z, y)) \wedge D(x, y))).$$

Je zou ook nog ‘een man die elke vrouw respecteert’ groot bereik kunnen geven. Dat geeft nog weer twee nieuwe mogelijkheden:

$$\exists y(M(y) \wedge \forall z(F(z) \rightarrow R(y, z)) \wedge \forall x(F(x) \rightarrow D(x, y))).$$

$$\exists y(M(y) \wedge \forall z(F(z) \rightarrow R(z, y)) \wedge \forall x(F(x) \rightarrow D(x, y))).$$

**Vraag 5** *Geef omschrijvingen in het Nederlands voor de volgende abstracties (zie de vorige vraag voor de betekenissen van de predikaten):*

1.  $\lambda x.Mx$ ,
2.  $\lambda x.\exists y(My \wedge Rxy)$ ,
3.  $\lambda x.\exists y(My \wedge Ryx)$ ,
4.  $\lambda x\lambda y.(Mx \wedge (Fy \wedge Rxy))$ .

**Antwoord.**

1.  $\lambda x.Mx$ : een man zijn.
2.  $\lambda x.\exists y(My \wedge Rxy)$ : een man respecteren.
3.  $\lambda x.\exists y(My \wedge Ryx)$ : door een man gerespecteerd worden.
4.  $\lambda x\lambda y.(Mx \wedge (Fy \wedge Rxy))$ : een respecteer-relatie zijn tussen een man en een vrouw.

**Vraag 6 (Bonusvraag)** In het college hebben we gezien: als  $A$  eindig is, dan is  $A^*$ , de verzameling van alle eindige rijtjes van elementen van  $A$ , aftelbaar oneindig. Maar stel nu dat  $A$  aftelbaar oneindig is. Is  $A^*$ , de verzameling van alle eindige rijtjes van elementen van  $A$ , dan aftelbaar oneindig of overaftelbaar? Waarom? (Beargumenteer je antwoord.)

**Antwoord.** Dit was een moeilijke vraag. Het diagonaal-argument van Cantor toepassen gaat niet, want de rijtjes zijn allemaal eindig, en om een nieuw element te genereren dat in de opsomming nog niet voorkwam maakt Cantor essentieel gebruik van het feit dat het nieuw te construeren rijtje oneindig is.

Om te laten zien dat  $A^*$  ook voor een aftelbaar oneindige taal aftelbaar oneindig blijft kun je als volgt redeneren. Neem eerst het lege rijtje. Merk op dat  $A^1, A^2, \dots$ , allemaal aftelbaar oneindig zijn. Maak nu een kwadrant dat er zo uitziet:

$$\begin{aligned} A^1 &= a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \cdots \\ A^2 &= x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \cdots \\ A^3 &= y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & \cdots \\ A^4 &= z_1 & x_2 & z_3 & z_4 & \cdots \\ &\vdots & & & & \end{aligned}$$

Dit kun je vervolgens aftellen op de manier van de breuken, door er diagonaal doorheen te gaan. Dus:

$$a_1, a_2, x_1, a_3, x_2, y_1, a_4, x_3, y_1, z_1, \dots$$

Dus  $A^*$  is aftelbaar.