Grafen: Kleuren en Routeren

door

Alexander Schrijver

1. Inleiding Grafen 3

1.1. Wat zijn grafen? 3
1.2. Graden en reguliere grafen 5
1.3. Volledige grafen 8
1.4. Volledig bipartiete grafen 8
1.5. Complement 9
1.6. De lijngraaf 10
1.7. Paden en wandelingen 11
1.8. Samenhangende grafen 12
1.9. Deelgrafen 14
1.10. Componenten 14
1.11. Circuits 16
1.12. Driehoeken 16
1.13. Bomen en bossen 17
1.14. Euler-grafen 18
1.15. Hamilton-grafen 22
1.16. Isomorfe grafen 24
1.17. Zelf-complementaire grafen 26

2. Kleuren 27

2.1. Inleiding 27
2.2. Het kleuren van grafen 28
2.3. Het kleurgetal 29
2.4. De maximum graad 31
2.5. Het kleuren van landkaarten 32
2.6. Van kaartkleuring naar graafkleuring 36
2.7. Planaire grafen 37

2.8. Facetten 40
2.9. De Eulerformule 41
2.10. 5-kleurbaarheid van planaire grafen 43
2.11. Toepassingen van puntkleuring van grafen 44
2.12. Bipartiete grafen 50
2.13. Lijnkleuringen 51
2.14. Het lijnkleurgetal van bipartiete grafen 53
2.15. Schoolroosters 57

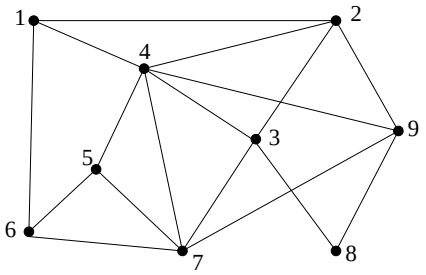
3. Routeren 62

3.1. Inleiding 62
3.2. Gerichte grafen 63
3.3. Paden 64
3.4. Stromen 64
3.5. De waarde van een stroom 66
3.6. Capaciteit 66
3.7. Het maximum-stroom-probleem 66
3.8. Snedes 67
3.9. De capaciteit van een snede 68
3.10. De maximum-stroom-algoritme 69
3.11. Stopt de algoritme altijd? 73
3.12. De max-stroom min-snede stelling 74
3.13. Het vinden van een minimum stroom 74
3.14. Materieelomloop 76
3.15. Bepalen van de optimale materieelomloop 77
3.16. Varianten 81
3.17. Het transportprobleem 82
3.18. De stelling van Menger 84

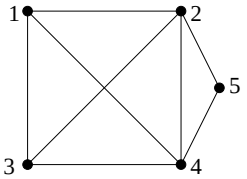
1. Inleiding Grafen

1.1. Wat zijn grafen?

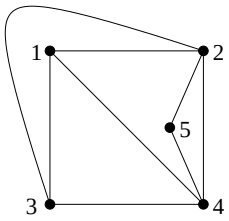
Het is niet moeilijk je een voorstelling te maken van grafen. In de Figuren 1.1–1.3 zijn er een paar getekend.



Figuur 1.1



Figuur 1.2



Figuur 1.3

Als plaatje bestaan ze steeds uit een aantal *punten* (of dikke stippen, of kleine rondjes), en een aantal lijnstukken of (algemener) curves die de punten verbinden. Deze curves heten de *lijnen* van de graaf.

Dergelijke plaatjes vormen slechts een *voorstelling* van grafen, die erg handig blijkt bij het bestuderen van graaf-problemen. De figuren laten ook zien dat niet geëist wordt dat de lijnen elkaar niet snijden.

Wiskundig worden grafen uiteraard formeler gedefineerd. We moeten daarbij bedenken dat een graaf bepaald wordt door de punten en door de lijnen — maar alleen *of* er een lijn loopt tussen bepaalde paren punten, en niet *hoe* die lijn precies is getekend.

Dit betekent dus dat de grafen in de Figuren 1.2 en 1.3 dezelfde graaf voorstellen.

Formeel kan de graaf dus volledig worden gespecificeerd door

- de verzameling V van punten, en
- de verzameling E van paren $\{u, v\}$ uit V waartussen een lijn loopt.

Vandaar dat een **graaf** G wordt gedefinieerd als een paar (V, E) waarbij V een eindige verzameling is, en E een verzameling van paren uit V. De paren bestaan steeds uit twee *verschillende* elementen. Dan heten de elementen uit V de **punten** van G, en de elementen uit E de **lijnen** of **kanten** van G. (De notatie V en E is afkomstig van **v**ertices en **e**dges.)

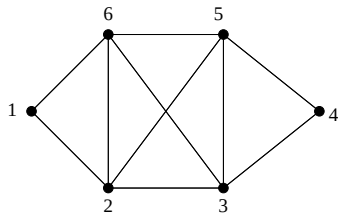
De graaf uit Figuur 1.1 wordt dan gegeven door:

$$(1) \qquad \begin{aligned}(&\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\},\{\{1,2\},\{1,4\},\{1,6\},\{2,4\},\{2,3\},\\ &\{2,9\},\{3,4\},\{3,7\},\{3,8\},\{4,5\},\{4,7\},\{4,9\},\{5,6\},\\ &\{5,7\},\{6,7\},\{7,9\},\{8,9\}\}),\end{aligned}$$

en elk van de grafen uit de Figuren 1.2 en 1.3 door:

$$(2) \qquad \begin{aligned}(&\{1,2,3,4,5\},\{\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{2,3\},\{2,4\},\{2,5\},\\ &\{3,4\},\{4,5\}\}).\end{aligned}$$

Twee punten u en v heten **verbonden** als het paar $\{u, v\}$ een lijn vormt. Als u en v verbonden zijn, dan heet v een **buur** van u.



Figuur 1.4

Opgave 1.1. Geef de notatie voor de graaf van Figuur 1.4.

Opgave 1.2. Teken de graaf $(\{1,2,3,4,5,6\}, \{\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{2,3\},\{2,5\},\{3,6\},\{4,5\},\{4,6\},\{5,6\}\})$.

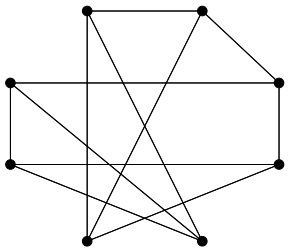
Opgave 1.3. Teken de graaf $(\{1,2,3,4,5,6\}, \{\{1,3\},\{1,4\},\{1,6\},\{2,3\},\{2,4\},\{2,5\},\{2,6\},\{3,5\},\{3,6\},\{4,5\},\{5,6\}\})$.

Opgave 1.4. Hoeveel grafen (V,E) bestaan er met $V = \{1,2,3,4\}$?

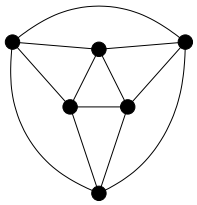
Opgave 1.5. Hoeveel grafen (V,E) bestaan er met $V = \{1,2,\ldots,n\}$?

1.2. Graden en reguliere grafen

De **graad** van een punt v is het aantal buren van v. Een graaf heet **regulier** als alle punten dezelfde graad hebben, en **k-regulier** als alle punten graad k hebben.



Figuur 1.5
Een 3-reguliere graaf



Figuur 1.6
Een 4-reguliere graaf

Opgave 1.6. Laat zien dat voor elke even $n \geq 4$, er een 3-reguliere graaf met $V = \{1, \ldots, n\}$ bestaat.

Opgave 1.7. Hoeveel 2-reguliere grafen bestaan er met $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$?

Opgave 1.8. Hoeveel 3-reguliere grafen bestaan er met $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$?

Opgave 1.9. Hoeveel 2-reguliere grafen bestaan er met $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$?

Opgave 1.10. Hoeveel 3-reguliere grafen bestaan er met $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$?

Opgave 1.11. Hoeveel lijnen heeft een 5-reguliere graaf met 16 punten?

Opgave 1.12. Hoeveel lijnen heeft een k-reguliere graaf met n punten?

Opgave 1.13. Bestaat er een 5-reguliere graaf met 17 punten?

Opgave 1.14. Hoeveel lijnen heeft een graaf met 6 punten waarvan de graden $2, 3, 3, 4, 4, 4$ zijn?

Opgave 1.15. Hoeveel lijnen heeft een graaf op $V = \{1, 2, \ldots, n\}$ met graden $d_1, d_2, \ldots, d_n$?

Opgave 1.16. Bewijs dat elke graaf een *even* aantal punten heeft van *oneven* graad.

Opgave 1.17. Laat G een graaf zijn met 14 punten en 25 lijnen zo dat elk punt graad 3 of 5 heeft. Hoeveel punten hebben graad 3?

Opgave 1.18. Zij G een graaf met $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Als we weten dat punt i graad i heeft voor $i = 1, 2, 3, 4, 5$, kunnen we dan hieruit de graad van punt 6 afleiden?

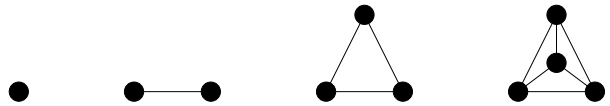
Opgave 1.19. Bewijs dat een graaf met n punten en m lijnen, een punt heeft van graad $\leq 2m/n$ en een punt van graad $\geq 2m/n$.

Opgave 1.20. Zij G een 3-reguliere graaf met $V = \{1, \ldots, 10\}$ met de eigenschap dat elk tweetal niet-verbonden punten een gemeenschappelijke buur heeft. Teken G.

Opgave 1.21. Bewijs dat elke graaf met tenminste 2 punten, 2 punten van dezelfde graad heeft.

1.3. Volledige grafen

Een graaf $G = (V, E)$ heet **volledig** als elk paar punten in V verbonden is. Een volledige graaf met n punten wordt aangegeven met K_n.



Figuur 1.7
De grafen K_1, K_2, K_3 en K_4

Opgave 1.22. Hoeveel lijnen heeft K_5?

Opgave 1.23. Hoeveel lijnen heeft K_n?

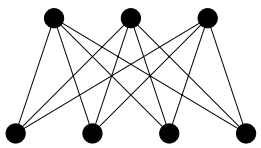
Opgave 1.24. Laat zien dat een graaf G op n punten volledig is als en alleen als G $(n-1)$-regulier is.

1.4. Volledig bipartiete grafen

Een graaf $G = (V, E)$ heet **volledig bipartiet** als V in twee niet-lege klassen V_1 en V_2 kan worden gesplitst zo dat

$$E = \{\{v_1, v_2\} \mid v_1 \in V_1, v_2 \in V_2\}. \tag{3}$$

Als $|V_1| = m$ en $|V_2| = n$, dan wordt deze graaf aangegeven met $K_{m,n}$.



Figuur 1.8
De graaf $K_{3,4}$

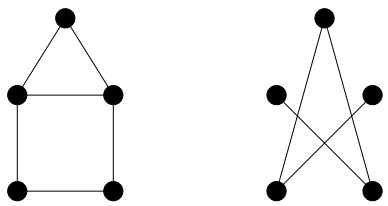
Opgave 1.25. Hoeveel lijnen heeft $K_{m,n}$?

Opgave 1.26. Voor welke m en n is $K_{m,n}$ regulier?

Opgave 1.27. Hoeveel volledig bipartiete grafen bestaan er met $V = \{1, \ldots, n\}$?

1.5. Complement

Het **complement** van een graaf $G = (V, E)$ is de graaf $\overline{G} = (V, F)$, waarbij F uit alle paren punten bestaat die niet tot E behoren.



Figuur 1.9
Een graaf G en het complement $\overline{G}$

Opgave 1.28. Bewijs $\overline{\overline{G}} = G$.

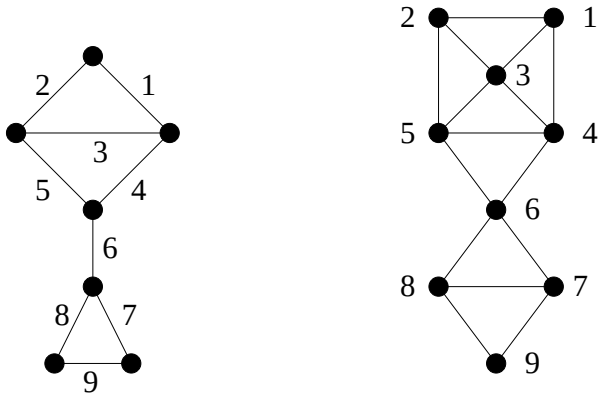
Opgave 1.29. Als G een k-reguliere graaf op n punten is, is dan ook $\overline{G}$ regulier? Zo ja, van welke graad?

Opgave 1.30. Laat G een graaf zijn op 6 punten met graden $2, 3, 3, 4, 4, 4$. Welke graden heeft $\overline{G}$? Is hieruit G af te leiden?

Opgave 1.31. Teken $\overline{K_{4,4}}$.

1.6. De lijngraaf

De **lijngraaf** van een graaf $G = (V, E)$ is de graaf waarvan de puntverzameling gelijk is aan E, waarbij twee (verschillende) elementen e en f van E verbonden zijn als en alleen als e en f een punt van G gemeen hebben. De lijngraaf van G wordt aangegeven met $L(G)$.



Figuur 1.10
Een graaf G en de lijngraaf $L(G)$

Opgave 1.32. Teken de lijngraaf van de graaf in Figuur 1.2.

Opgave 1.33. Hoeveel lijnen heeft de lijngraaf van een graaf met graden $2, 3, 3, 4, 4, 4$?

Opgave 1.34. Hoeveel lijnen heeft de lijngraaf van een graaf met graden $d_1, \ldots, d_n$?

Opgave 1.35. Bewijs dat de lijngraaf van een reguliere graaf ook regulier is. Als G k-regulier is, welke graad heeft $L(G)$ dan?

Opgave 1.36. Zij G een k-reguliere graaf op n punten. Hoeveel lijnen heeft $L(G)$?

Opgave 1.37. Beschrijf de grafen G waarvoor $L(G)$ een volledige graaf is.

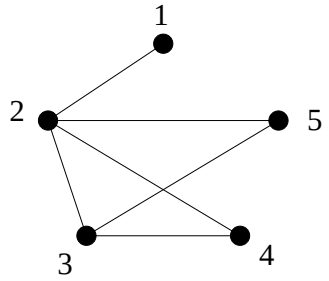
Opgave 1.38. Teken $\overline{L(K_5)}$ zo regelmatig mogelijk. (Deze graaf heet de **Petersen graaf**.)

1.7. Paden en wandelingen

Een **wandeling** in een graaf $G = (V, E)$ is een rij punten:

(4) $(v_0, v_1, \ldots, v_k)$

zodanig dat v_{i-1} en v_i verbonden zijn, voor elke $i = 1, \ldots, k$.



Figuur 1.11

Dus

(5) $(2, 5, 3, 4, 2, 3)$

is een wandeling in de graaf

(6) $(\{1, 2, 3, 4, 5\}, \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}\})$.

Het getal k heet de **lengte** van de wandeling.

Als $v_0, v_1, \ldots, v_k$ verschillende punten zijn, dan noemt men de wandeling ook wel een **pad**.

Opgave 1.39. Hoeveel paden heeft de volledige graaf op 3 punten?

Opgave 1.40. Hoeveel paden heeft de volledige graaf op 4 punten?

We zeggen dat de wandeling $(v_0, \ldots, v_k)$ de punten v_0 en v_k **verbindt**, of **loopt van** v_0 **naar** v_k, of **tussen** v_0 en v_k.

Opgave 1.41. Hoeveel paden lopen er in de volledige graaf op $\{1, 2, 3, 4\}$ van punt 1 naar punt 3?

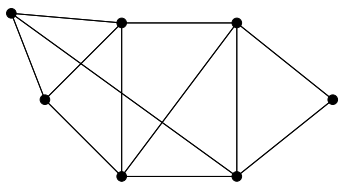
Opgave 1.42. Hoeveel paden lopen er in de volledige graaf op $\{1, \ldots, n\}$ van punt 1 naar punt n?

Opgave 1.43. Bewijs dat als er in een graaf $G = (V, E)$ een wandeling van punt s naar punt t loopt, dan loopt er ook een pad van s naar t.

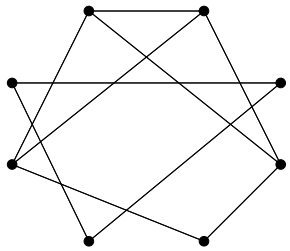
Opgave 1.44. Bewijs dat een graaf waarin elk punt graad tenminste k heeft, een pad heeft van lengte k.

1.8. Samenhangende grafen

Een graaf $G = (V, E)$ heet **samenhangend** als tussen elk tweetal punten een pad loopt.



Figuur 1.12
Een samenhangende graaf



Figuur 1.13
Een onsamenhangende graaf

Opgave 1.45. Welke van de volgende grafen zijn samenhangend: K_5, $\overline{K_5}$, $K_{3,4}$, $\overline{K_{3,4}}$, $L(K_4)$, $\overline{L(K_4)}$?

Opgave 1.46. Bestaat er een samenhangende graaf op 6 punten met 4 lijnen?

Opgave 1.47. Laat zien dat er voor elke n, een samenhangende graaf bestaat met n punten en $n-1$ lijnen.

Opgave 1.48. Laat zien dat elke samenhangende graaf met n punten tenminste $n-1$ lijnen heeft.

Opgave 1.49. Bestaat er een onsamenhangende graaf op 6 punten met 11 lijnen?

Opgave 1.50. Laat zien dat er voor elke n, een onsamenhangende graaf bestaat met n punten en $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ lijnen.

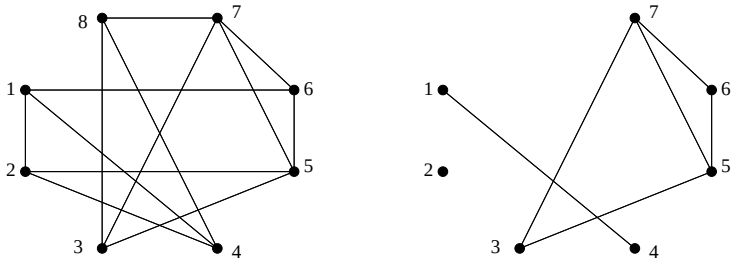
Opgave 1.51. Laat zien dat elke onsamenhangende graaf met n punten ten hoogste $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ lijnen heeft.

Opgave 1.52. Bewijs dat als G onsamenhangend is, dan is $\overline{G}$ samenhangend.

Opgave 1.53. Bewijs dat als G samenhangend is, dan is ook $L(G)$ samenhangend.

1.9. Deelgrafen

Een graaf $G' = (V', E')$ heet een **deelgraaf** van $G = (V, E)$ als $V' \subseteq V$ en $E' \subseteq E$.



Figuur 1.14
Een graaf G en een deelgraaf van G

Opgave 1.54. Bepaal alle deelgrafen van de graaf

$$(\{1, 2, 3\}, \{\{1, 2\}, \{2, 3\}\}).$$

Opgave 1.55. Hoeveel deelgrafen van $G = (V, E)$ zijn ook een deelgraaf van $\overline{G}$?

1.10. Componenten

Een **component** van een graaf $G = (V, E)$ is een maximale samenhangende deelgraaf $G' = (V', E')$; dat wil zeggen, G' is samenhangend, en als G' een deelgraaf is van een samenhangende deelgraaf G'' van G, dan geldt $G'' = G'$.

Dus een graaf G is samenhangend als en alleen als G precies één component heeft.

Opgave 1.56. Wat zijn de componenten van de graaf in Figuur 1.13?

Opgave 1.57. Hoeveel componenten heeft $\overline{K_{m,n}}$?

Opgave 1.58. Hoeveel componenten heeft $\overline{K_n}$?

Opgave 1.59. Bewijs dat als $K_1 = (V_1, E_1)$ en $K_2 = (V_2, E_2)$ twee verschillende componenten van G zijn, dan geldt $V_1 \cap V_2 = \emptyset$.

Opgave 1.60. Bewijs dat elke punt van $G = (V, E)$ bevat is in precies één component.

Opgave 1.61. Bewijs dat als $K_1 = (V_1, E_1)$ en $K_2 = (V_2, E_2)$ twee verschillende componenten van G zijn, dan is er geen lijn die V_1 en V_2 verbindt.

Opgave 1.62. Bewijs dat voor elke twee punten u en v geldt: er loopt een pad tussen punten u en v $\iff$ u en v behoren tot dezelfde component.

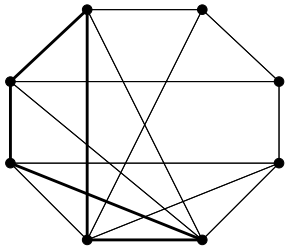
Opgave 1.63. Zij G een graaf met n punten zo dat de graad van elk punt tenminste $\frac{1}{2}(n-1)$ is. Bewijs dat G samenhangend is.

Opgave 1.64. Bewijs dat een graaf $G = (V, E)$ tenminste $|V| - |E|$ componenten heeft.

Opgave 1.65. Bewijs dat als een graaf precies twee punten van oneven graad heeft, dan loopt er een pad tussen deze twee punten.

1.11. Circuits

Een wandeling $(v_0, \ldots, v_k)$ heet een **gesloten wandeling** als $v_0 = v_k$.



Figuur 1.15
Een circuit

Een gesloten wandeling $(v_0, \ldots, v_k)$ heet een **circuit** als $k \geq 3$ en $v_1, \ldots, v_k$ zijn alle verschillend.

Opgave 1.66. Hoeveel circuits heeft K_4?

Opgave 1.67. Bewijs dat elke niet-lege graaf waarin elk punt graad tenminste 2 heeft, een circuit heeft.

1.12. Driehoeken

Een **driehoek** is een circuit van lengte 3.

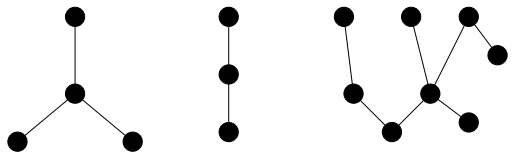
Opgave 1.68. Voor welke grafen G heeft $L(G)$ geen driehoeken?

Opgave 1.69. Laat zien dat als G een graaf is op 6 punten, dan bevat G of $\overline{G}$ een driehoek.

Opgave 1.70. Bewijs dat een graaf met $2n$ punten zonder driehoeken ten hoogste n^2 lijnen heeft (Turán's stelling).

1.13. Bomen en bossen

Een graaf $G = (V, E)$ heet een **bos** als G geen circuits heeft. Een **boom** is een samenhangend bos.



Figuur 1.16
Een bos

Opgave 1.71. Hoeveel bomen zijn er met $V = \{1, 2, 3\}$?

Opgave 1.72. Hoeveel bomen zijn er met $V = \{1, 2, 3, 4\}$?

Opgave 1.73. Hoeveel bomen zijn er met $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$?

Opgave 1.74. Bewijs dat elke component van een bos een boom is.

Opgave 1.75. Bewijs dat tussen elk tweetal punten in een boom precies één pad loopt.

Opgave 1.76. Bewijs dat elke boom met tenminste twee punten, tenminste één punt van graad 1 heeft (vergelijk Opgave 1.67).

Opgave 1.77. Leid uit de vorige opgave af dat elke boom met n punten precies $n - 1$ lijnen heeft.

Opgave 1.78. Bewijs dat elke boom met precies twee punten van graad 1 een pad vormt.

Opgave 1.79. Bewijs dat een bos op n punten met k componenten

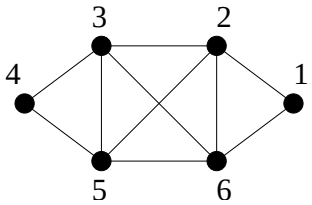
precies $n - k$ lijnen heeft.

Opgave 1.80. Bewijs dat elke boom met tenminste twee punten, tenminste twee punten van graad 1 heeft.

Opgave 1.81. Zij G een boom die een punt heeft van graad k. Bewijs dat G tenminste k punten heeft van graad 1.

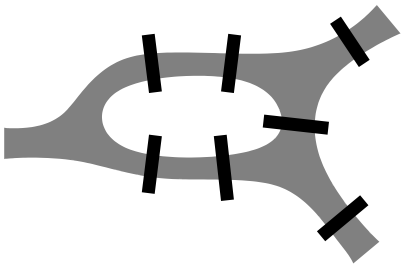
1.14. Euler-grafen

Een **Euler-cykel** in een graaf $G = (V, E)$ is een gesloten wandeling $W = (v_0, \ldots, v_k)$ met de eigenschap dat W elke lijn precies eenmaal doorloopt; dat wil zeggen, voor elke lijn e in E bestaat er precies één $i \in \{1, \ldots, k\}$ zo dat $e = \{v_{i-1}, v_i\}$.



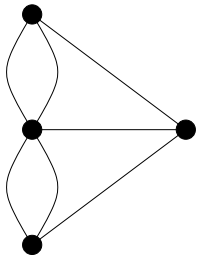
Figuur 1.17
Een Euler-graaf

Een graaf G heet een **Euler-graaf** als G een Euler-cykel heeft.



Figuur 1.18
De bruggen van Koningsbergen

De oorsprong van dit begrip gaat terug tot 1736, toen Leonhard Euler een oplossing publiceerde van het zgn. *Koningsberger bruggenprobleem*: Kan er een wandeling door Koningsbergen gemaakt worden die precies eenmaal over elk van de zeven bruggen van de stad gaat?



Figuur 1.19
De bijbehorende multigraaf

Euler representeerde het probleem als een grafenprobleem, door de stadsdelen voor te stellen door punten, en de bruggen door lijnen die de punten (= stadsdelen) verbinden. De graaf is in feite een **multigraaf**: er kan meer dan één lijn tussen twee punten lopen. Dan is de wandeling mogelijk als en alleen als deze graaf een Euler-graaf is.

Opgave 1.82. Voor welke n is K_n een Euler-graaf?

Opgave 1.83. Voor welke m, n is $K_{m,n}$ een Euler-graaf?

Opgave 1.84. Bewijs dat elk punt van een Euler-graaf een even graad heeft.

Opgave 1.85. Bewijs dat een reguliere Euler-graaf met een even aantal punten een even aantal lijnen heeft.

Opgave 1.86. Zij G een Euler-graaf met een even aantal lijnen. Laat $d_1, \ldots, d_n$ de graden van de punten zijn. Bewijs dat G een deelgraaf heeft met graden $\frac{1}{2}d_1, \ldots, \frac{1}{2}d_n$.

Opgave 1.87. Is het mogelijk de dominostenen met nummerparen $0-0$ tot en met $6-6$ zodanig op een rij te leggen dat aangrenzende nummers gelijk zijn?

Om Euler-grafen te karakteriseren, is het handig om **geïsoleerde** punten uit te sluiten, d.w.z. punten van graad 0. Voor het al of niet Euler-graaf zijn, zijn dergelijke punten irrelevant.

Stelling 1.1 (Euler's stelling)**.** *Een graaf $G = (V, E)$ zonder geïsoleerde punten is een Euler-graaf als en alleen als G samenhangend is en alle graden van G even zijn.*

Bewijs. I. Veronderstel eerst dat G een Euler-graaf is. Laat

$$C = (v_0, v_1, \ldots, v_k) \tag{7}$$

een Euler-cykel zijn.

Dan is G samenhangend, want kies $s, t \in V$. Omdat G geen geïsoleerde punten heeft, zijn er lijnen e en f met $s \in e$ en $t \in f$. Omdat C zowel e als f doorloopt, bestaan er i en j zo dat $v_i = s$ en $v_j = t$. We mogen aannemen dat $i < j$ (anders verwisselen we s en t). Dan is $(v_i, v_{i+1}, \ldots, v_j)$ een pad van s naar t.

Elk punt u van G heeft een even graad: de graad van u is gelijk aan tweemaal het aantal $i \in \{1, \ldots, k\}$ waarvoor $u = v_i$ geldt.

II. Veronderstel omgekeerd dat G samenhangend is en dat elke graad even is. Laat

$$W = (v_0, v_1, \ldots, v_n) \tag{8}$$

een zo lang mogelijke wandeling zijn waarin elke lijn *hoogstens* eenmaal voorkomt.

Dan geldt $v_n = v_0$. Anders zou er een oneven aantal lijnen dat v_n bevat zijn doorlopen. Omdat de graad van v_n even is, bestaat er een lijn $e \ni v_n$ die nog niet doorlopen is; zeg $e = \{v_n, u\}$. Dan kunnen we W verlengen tot $(v_0, v_1, \ldots, v_n, u)$. Dit is in tegenspraak met onze aanname dat W zo lang mogelijk is.

Dus W is een gesloten wandeling. Stel nu dat W geen Euler-cykel is. Er bestaan dus lijnen die niet door W doorlopen worden; zeg f wordt niet door W doorlopen. Omdat G samenhangend is, bestaat er een pad

$$P = (w_0, w_1, \ldots, w_m) \tag{9}$$

zo dat $f = \{w_0, w_1\}$ en zo dat w_m in W voorkomt. We kiezen P zo kort mogelijk. Dan komen de lijnen in P niet in W voor (anders kunnen we P inkorten).

Omdat w_m in W voorkomt, bestaat er een i waarvoor $v_i = w_m$. Dan is

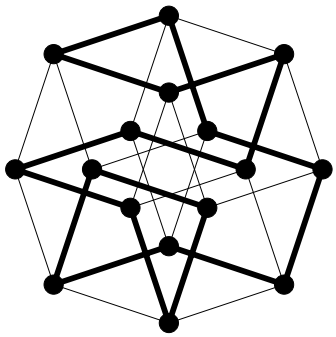
$$W' := (w_0, w_1, \ldots, w_m = v_i, v_{i+1}, \ldots, v_n = v_0, v_1, \ldots, v_i) \tag{10}$$

een wandeling waarin elke lijn hoogstens eenmaal voorkomt. De lengte van W' is $n + m > n$, in tegenspraak met de aanname dat W zo lang mogelijk is. ∎

Opgave 1.88. Zij G een samenhangende graaf met precies twee punten van oneven graad. Leid uit Euler's stelling af dat G een wandeling bevat die elke lijn precies eenmaal doorloopt.

1.15. Hamilton-grafen

Een circuit C heet een **Hamilton-circuit** als elk punt van de graaf in C voorkomt. Een graaf G heet een **Hamilton-graaf** als G een Hamilton-circuit bevat.



Figuur 1.20
Een Hamilton-graaf

Opgave 1.89. Welke van de volgende grafen zijn Hamilton-grafen: K_n, $K_{m,n}$, $\overline{L(K_5)}$ (de Petersen-graaf)?

Opgave 1.90. Laat zien dat, als n oneven is, een paard op een $n \times n$ schaakbord niet (met de paardensprong) een rondtour over het schaakbord kan maken zo dat elk vakje precies eenmaal wordt doorlopen.

Opgave 1.91. Laat zien dat er voor elke n een graaf G op n punten bestaat zo dat elk punt graad tenminste $\frac{1}{2}n - 1$ heeft en zo dat G geen Hamilton-graaf is.

Voor Hamilton-grafen is geen karakterisering bekend vergelijkbaar met Stelling 1.1. De volgende stelling geeft een *voldoende* voorwaarde voor het Hamilton-zijn van een graaf. De stelling laat ook zien dat de grens $\frac{1}{2}(n-1)$ in Opgave 1.91 niet verhoogd kan worden tot $\frac{1}{2}n$.

Stelling 1.2 (Dirac's stelling)**.** *Zij G een graaf met n (≥ 3) punten waarin elk punt graad tenminste $\frac{1}{2}n$ heeft. Dan is G een Hamilton-graaf.*

Bewijs. Stel er bestaat een tegenvoorbeeld. Dan bestaat er ook een tegenvoorbeeld G op n punten met zoveel mogelijk lijnen. Dus G is zelf geen Hamilton-graaf, maar als we een lijn toevoegen, wordt G een Hamilton-graaf. Er bestaat dus een pad

$$P = (v_1, v_2, \ldots, v_n) \tag{11}$$

waarin elk punt precies eenmaal voorkomt (een **Hamilton-pad**).

Omdat G geen Hamilton-graaf is, zijn v_1 en v_n niet verbonden. Definieer:

$$\begin{aligned} &I := \{i \mid v_i \text{ is een buur van } v_1\} \text{ en} \\ &J := \{i \mid v_{i-1} \text{ is een buur van } v_n\}. \end{aligned} \tag{12}$$

Omdat v_1 graad tenminste $\frac{1}{2}n$ heeft, geldt $|I| \geq \frac{1}{2}n$. Evenzo geldt $|J| \geq \frac{1}{2}n$. Omdat I en J deelverzamelingen zijn van $\{2, \ldots, n\}$, weten we dat $I \cap J \neq \emptyset$. We kunnen dus een i in $I \cap J$ kiezen.

Dus v_i is een buur van v_1 en v_{i-1} is een buur van v_n. Dan is

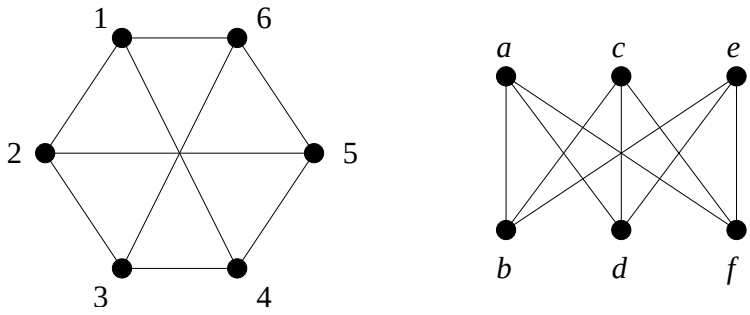
$$(v_1, v_i, v_{i+1}, \ldots, v_n, v_{i-1}, v_{i-2}, \ldots, v_1) \tag{13}$$

een Hamilton-circuit in G, in tegenspraak met onze aanname. ∎

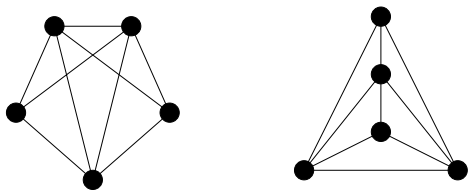
1.16. Isomorfe grafen

Twee grafen $G = (V, E)$ en $G' = (V', E')$ heten **isomorf** als er een bijectie $f : V \to V'$ bestaat zo dat voor elk tweetal punten u en v geldt:

(14) u en v zijn verbonden in $G \iff f(u)$ en $f(v)$ zijn verbonden in G'.

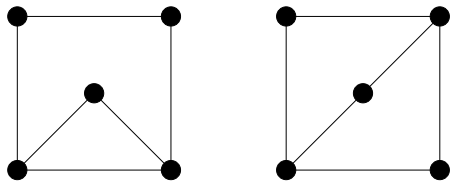


Figuur 1.21
Twee isomorfe grafen



Figuur 1.22

Opgave 1.92. Laat zien dat de twee grafen in Figuur 1.22 isomorf zijn.



Figuur 1.23

Opgave 1.93. Waarom zijn de twee grafen in Figuur 1.23 niet isomorf?

Opgave 1.94. Bewijs dat als reguliere grafen G en H isomorf zijn, dan hebben zij dezelfde graad.

Opgave 1.95. Geef een voorbeeld van twee reguliere grafen van dezelfde graad en met evenveel punten die niet isomorf zijn.

Opgave 1.96. Bestaat er een graaf G die isomorf is met $L(G)$?

Opgave 1.97. Bestaat er een graaf G die isomorf is met $\overline{L(G)}$?

Opgave 1.98. Bestaat er een graaf G die isomorf is met $L(\overline{G})$?

Opgave 1.99. Bestaat er een graaf G die isomorf is met $\overline{L(\overline{G})}$?

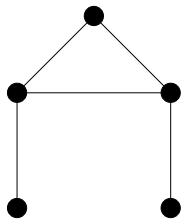
Opgave 1.100. Als G en H isomorf zijn, zijn dan ook $L(G)$ en $L(H)$ isomorf?

Opgave 1.101. Als $L(G)$ en $L(H)$ isomorf zijn, zijn dan ook G en H isomorf?

Opgave 1.102. Bepaal het aantal niet-isomorfe grafen op 5 punten.

1.17. Zelf-complementaire grafen

Een graaf G heet **zelf-complementair** als G en $\overline{G}$ isomorf zijn.



Figuur 1.24
Een zelf-complementaire graaf

Opgave 1.103. Hoeveel lijnen heeft een zelf-complementaire graaf op n punten?

Opgave 1.104. Bewijs dat voor het aantal punten n van een zelf-complementaire graaf steeds geldt: $n \equiv 0 \pmod 4$ of $n \equiv 1 \pmod 4$.

Opgave 1.105. Bepaal alle zelf-complementaire grafen op $\{1, 2, 3, 4\}$.

Opgave 1.106. Bepaal alle zelf-complementaire grafen op $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Opgave 1.107. Laat zien dat $L(K_{3,3})$ zelf-complementair is.

2. Kleuren

2.1. Inleiding

Een van de bekendste graafproblemen stamt uit de 19de eeuw, het vierkleurenprobleem: Is elke landkaart met vier kleuren te kleuren? Dit probleem werd door Tait omgezet in een graafprobleem, en in de loop der jaren werden verschillende oplossingen voorgesteld, die alle echter niet juist bleken te zijn. Pas in 1976 slaagden Appel en Haken er in een sluitend bewijs te leveren, maar wel met behulp van de computer, die een hoop case-checking voor zijn rekening nam.

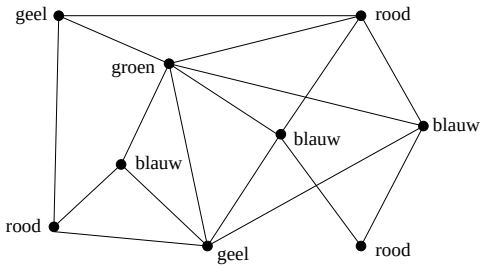
Het vierkleurenprobleem lijkt vrij theoretisch, maar de oplossing ervan heeft geleid tot een schat aan methoden en technieken welke van groot praktisch belang blijken te zijn.

Zo kunnen problemen als het toewijzen van treinperrons, busplatforms, hotelkamers, vacantie-bungalows enz. worden gezien als het kleuren van de punten van een graaf. Het toewijzen van frequenties aan radiostations en — dezer dagen van groot belang — aan mobiele telefoons, wordt eveneens gemodelleerd als een graafkleuringsprobleem.

Ook kan graafkleuring worden toegepast bij het opstellen van schoolroosters. Het maken van zo'n rooster is en blijft in het algemeen een berucht, lastig probleem, waarvoor het moeilijk is binnen redelijke tijd een voor iedereen optimale oplossing te vinden. Grafen geven een gereedschap om het probleem te modelleren en te visualiseren, en om deelproblemen snel op te lossen. De basis van de meeste pakketten ontwikkeld voor dit probleem berust op een methode (en stelling) uit 1916 van de Hongaar Kőnig over het kleuren van grafen.

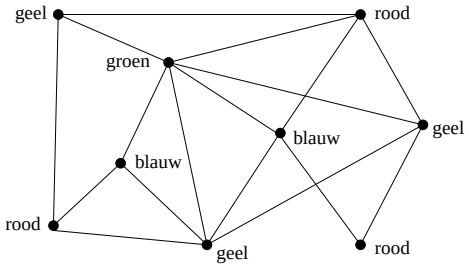
2.2. Het kleuren van grafen

Informeel betekent het kleuren van een graaf: het kleuren van de punten van de graaf zodanig dat aangrenzende punten met verschillende kleuren worden gekleurd. In Figuur 2.1 zien we een dergelijke kleuring.



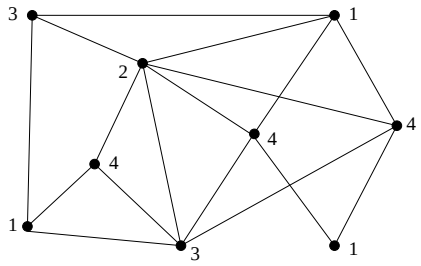
Figuur 2.1

In Figuur 2.2 zien we een *incorrecte* kleuring van dezelfde graaf.



Figuur 2.2

Bij de bestudering van graafkleuringen, maakt het niet uit *welke* kleuren worden gebruikt — het is alleen van belang dat buren niet dezelfde kleur krijgen. Dus of onze kleurverzameling nu {rood,groen,geel,blauw} is dan wel {oranje,paars,bruin,grijs}, het maakt wiskundig voor het probleem geen verschil. We kunnen de kleuren ook gewoon een nummer geven, zoals in Figuur 2.3.



Figuur 2.3

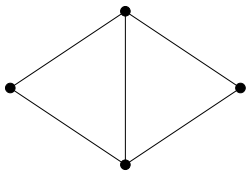
We kunnen dan een abstracte verzameling K van kleuren gebruiken, bijvoorbeeld $K = \{1, 2, \ldots, k\}$.

Een **kleuring** van een graaf $G = (V, E)$ is dan een functie $f : V \to K$ met de eigenschap dat

(1) als $\{u, v\} \in E$ dan $f(u) \neq f(v)$.

Hierbij wordt niet geëist dat alle kleuren uit K ook echt gebruikt worden.

Opgave 2.1. Hoeveel kleuringen bestaan er voor de volgende graaf $G = (V, E)$ met kleurverzameling $K = \{1, 2, 3, 4\}$?



Figuur 2.4

2.3. Het kleurgetal

Als je voldoende kleuren tot je beschikking hebt, is het makkelijk een graaf te kleuren. Je zou bijvoorbeeld alle punten een verschillende kleur kunnen geven. Een graaf G met n punten is dus altijd met n kleuren te kleuren.

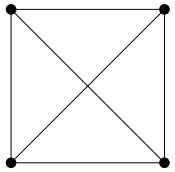
De uitdaging is uiteraard om *zo weinig mogelijk* kleuren te gebruiken. Vandaar dat het **kleurgetal** van een graaf G gedefinieerd wordt als het minimale aantal kleuren dat nodig is om de punten van G te kleuren. Het kleurgetal van G wordt genoteerd met $\chi(G)$:

(2) $\chi(G)$ is het kleurgetal van G.

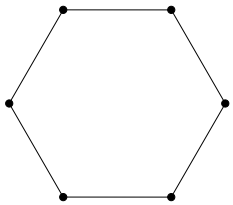
In wiskundige termen: $\chi(G)$ is gelijk aan de minimale grootte $|K|$ van een kleurverzameling K waarvoor een kleuring $f : V \to K$ bestaat.

Een graaf G heet k-**kleurbaar** als $\chi(G) \leq k$.

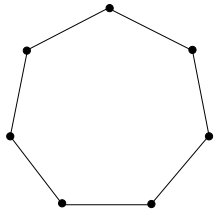
Opgave 2.2. Bepaal het kleurgetal van de volgende grafen:



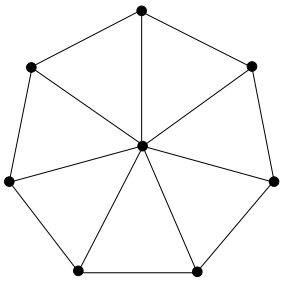
Figuur 2.5



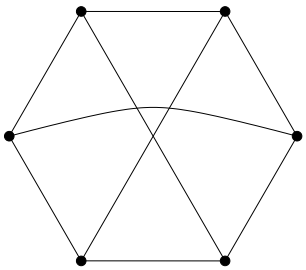
Figuur 2.6



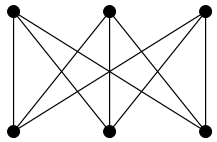
Figuur 2.7



Figuur 2.8



Figuur 2.9



Figuur 2.10

Opgave 2.3. Wat is het kleurgetal van K_n?

Opgave 2.4. Wat is het kleurgetal van $K_{m,n}$?

Opgave 2.5. Wat is het kleurgetal van een bos?

Opgave 2.6. Voor welke grafen $G = (V, E)$ geldt $\chi(G) = |V|$?

Opgave 2.7. Bewijs dat voor elke graaf $G = (V, E)$ geldt:

$$\tfrac{1}{2}\chi(G)(\chi(G) - 1) \leq |E|.$$

Opgave 2.8. Laat D_n de graaf zijn met $V = \{1, \ldots, n\}$, waarbij twee verschillende punten k en m verbonden zijn als en alleen als $k|m$ of $m|k$. (Hier betekent $k|m$: k is een deler van m.) Bepaal $\chi(D_n)$.

2.4. De maximum graad

Noteer het maximum van de graden van de punten in een graaf G met $\Delta(G)$.

Opgave 2.9. Bewijs dat voor elke graaf G geldt:

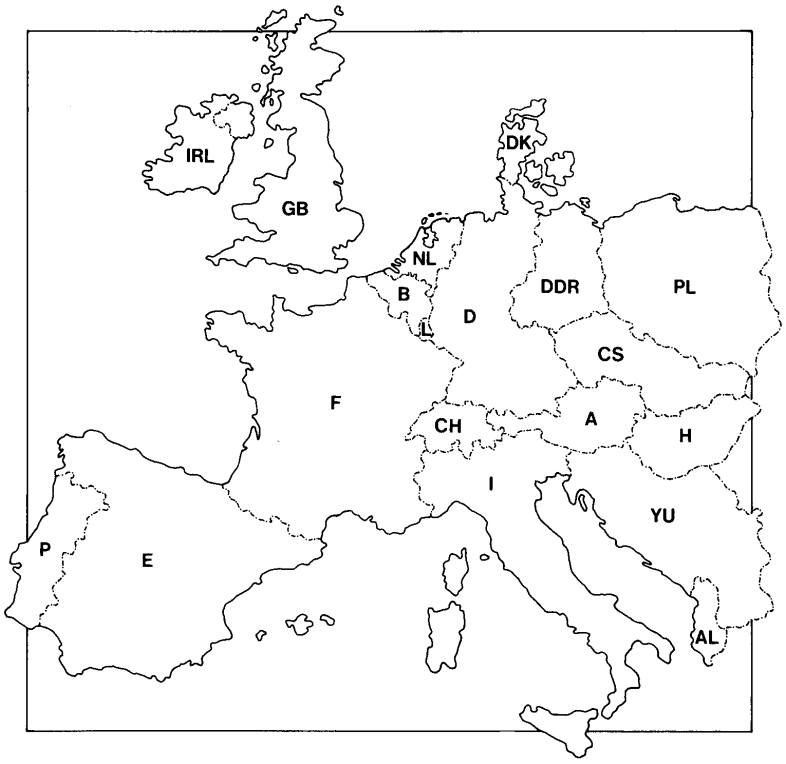
$$\chi(G) \leq \Delta(G) + 1.$$

Opgave 2.10. Geef grafen G waarvoor $\chi(G) = \Delta(G) + 1$.

(Brooks heeft in 1941 bewezen dat voor elke samenhangende graaf G geldt: $\chi(G) \leq \Delta(G)$, tenzij G een volledige graaf of een oneven circuit is.)

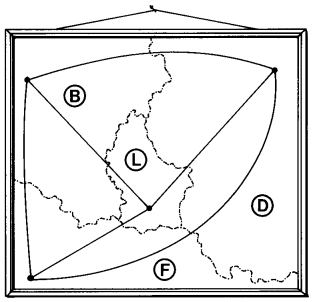
2.5. Het kleuren van landkaarten

In 1852 stelde de student Frederick Guthrie de vraag of er een bewijs bestaat voor de bewering dat elke landkaart met vier kleuren te kleuren is, zodanig dat aangrenzende landen verschillende kleuren krijgen. Deze vraag was afkomstig van Frederick's broer Francis.



Figuur 2.11
Een oude landkaart

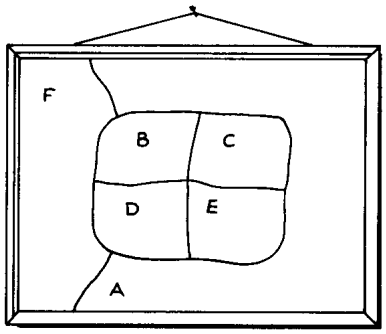
Hij gaf aan dat er makkelijk kaarten te bedenken zijn waarbij je tenminste vier kleuren nodig hebt (zie Figuur 2.12).



Figuur 2.12
Dit kaartfragment geeft aan dat tenminste vier kleuren nodig zijn

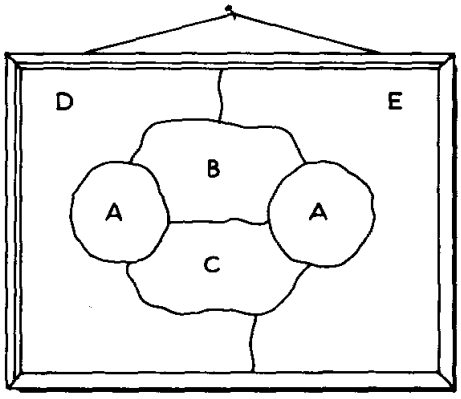
Maar hij kon zich geen kaart voorstellen waarbij je vijf of meer kleuren nodig hebt.

Er wordt hierbij van uit gegaan dat landen alleen aangrenzend heten als ze een grens*lijn* gemeen hebben — een grens*punt* (zoals in Figuur 2.13) is niet voldoende.



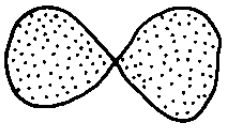
Figuur 2.13
De landen B en E grenzen niet aan elkaar

Bovendien moeten landen *samenhangend* zijn. Als landen uit verschillende delen kunnen bestaan, dan kan makkelijk een voorbeeld worden bedacht waarbij vijf kleuren nodig zijn (zie Figuur 2.14).



Figuur 2.14
Land A is onsamenhangend, en er zijn vijf kleuren nodig

Ook landen van de volgende vorm sluiten we uit:



Figuur 2.15

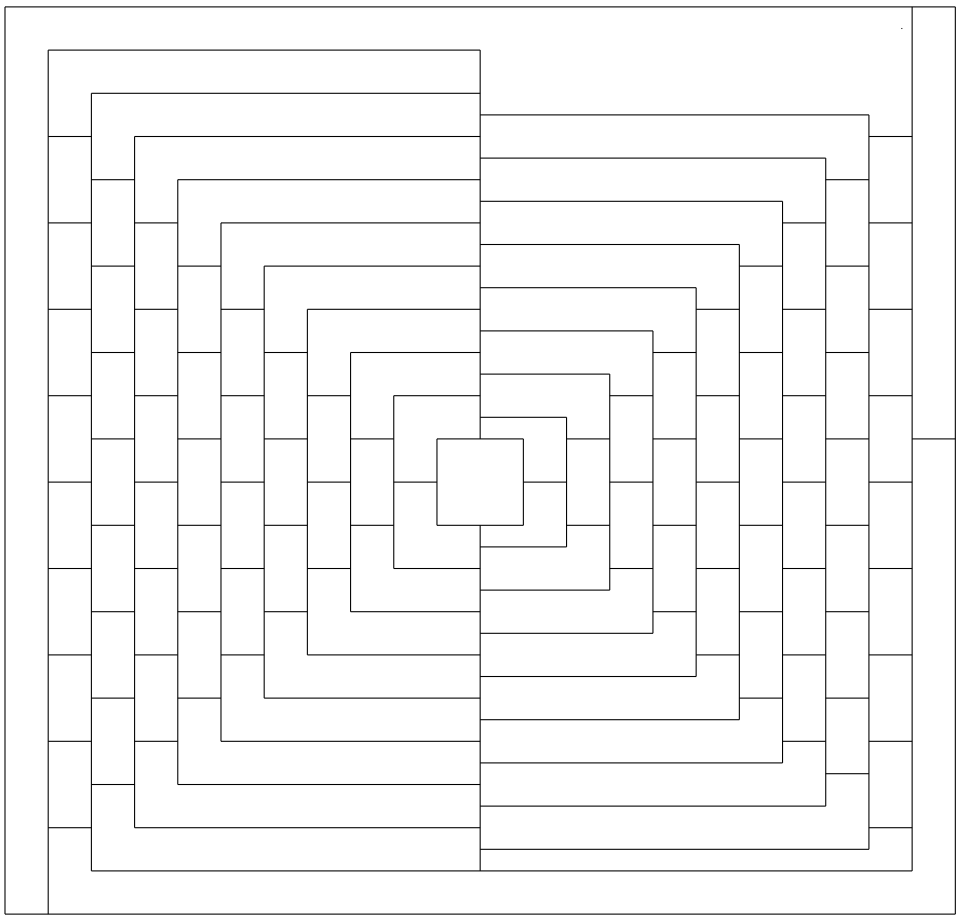
Het door Guthrie opgeworpen probleem trok direct de aandacht van vele wiskundigen (waaronder De Morgan en Cayley), en stond bekend als het *vierkleurenvermoeden*. In 1879 dacht A.B. Kempe een bewijs te hebben gevonden, hetgeen met veel enthousiasme begroet werd. Verschillende verkortingen werden gepubliceerd, totdat Heawood in 1890 moest constateren dat er een essentiële fout in Kempe's bewijs zat ... Heawood kon met Kempe's methode wel aantonen dat elke landkaart met *vijf* kleuren te kleuren is. (We geven hiervan een bewijs in § 2.10.)

Pas in 1976 waren Appel en Haken in staat het vierkleurenvermoeden te bewijzen, waarbij overigens de computer een groot aantal speciale gevallen moest controleren. (In 1997 werd een korter bewijs (maar nog steeds met behulp van de computer) gegeven door Robertson, Sanders,

Seymour en Thomas.)

Opgave 2.11. Kleur de kaart van Figuur 2.11 met 4 kleuren.

Opgave 2.12. Kleur de kaart van Figuur 2.16 (uit het april 1975 nummer van *Scientific American*) met zo min mogelijk kleuren.



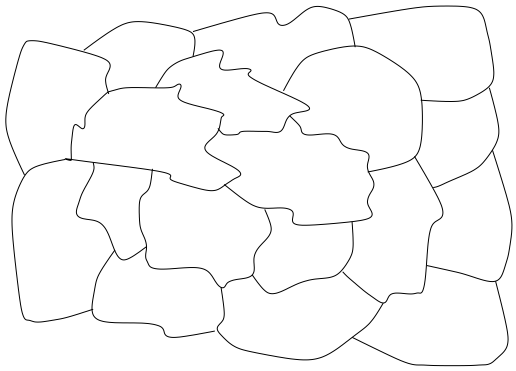
Figuur 2.16
Is deze kaart met vier kleuren te kleuren?

Opgave 2.13. Geef een voorbeeld van een kaart waarin landen van de vorm van Figuur 2.15 voorkomen en die niet 4-kleurbaar is.

2.6. Van kaartkleuring naar graafkleuring

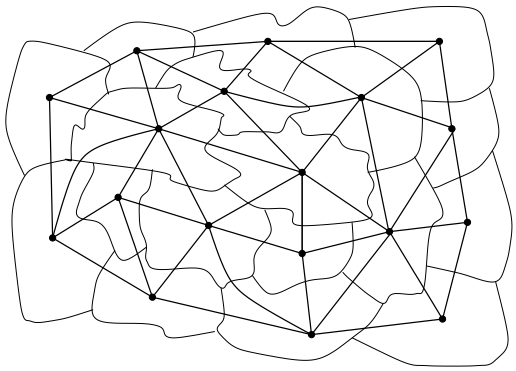
Dat kaartkleuringen kunnen worden bestudeerd met behulp van grafen werd ontdekt door P.G. Tait in 1880. We kunnen nl. elk land voorstellen door een punt, en aangrenzende punten (= landen) verbinden door een lijn.

Bijvoorbeeld in de landkaart:



Figuur 2.17

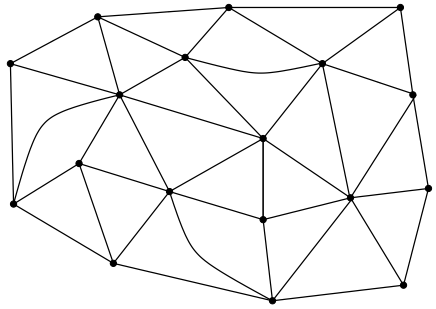
kunnen we een graaf maken als in:



Figuur 2.18

Het kleuren van de landkaart correspondeert dan met het kleuren van de punten van de graaf op zo'n manier dat elk tweetal punten dat verbonden is door een lijn verschillende kleuren krijgt.

Voor de kaartkleuring is dan alleen de graaf van belang:



Figuur 2.19

Opgave 2.14. Bepaal de graaf behorende bij de landkaart van Figuur 2.11.

2.7. Planaire grafen

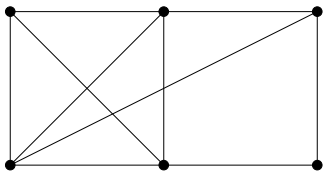
De graaf die op bovenbeschreven manier uit een landkaart wordt geconstrueerd, is steeds **planair**, dat wil zeggen, de graaf kan zo in het platte vlak worden getekend dat de lijnen elkaar niet snijden of raken, behalve in een gemeenschappelijk eindpunt.

Het zal duidelijk zijn dat niet elke graaf planair is. Twee bekende niet-planaire grafen zijn:

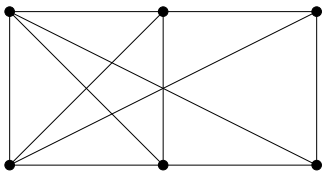
K_5 $K_{3,3}$

Figuur 2.20

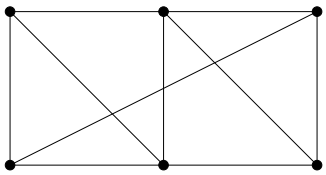
Opgave 2.15. Onderzoek welke van de volgende grafen planair zijn.



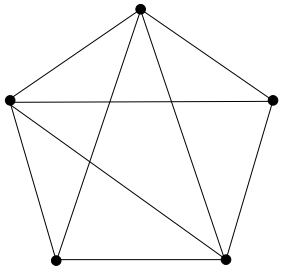
Figuur 2.21



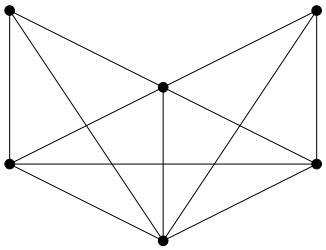
Figuur 2.22



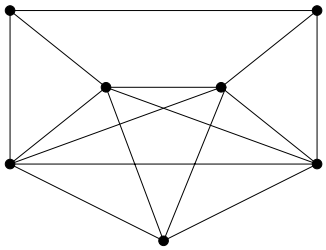
Figuur 2.23



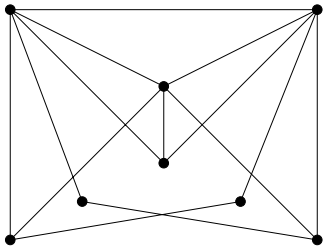
Figuur 2.24



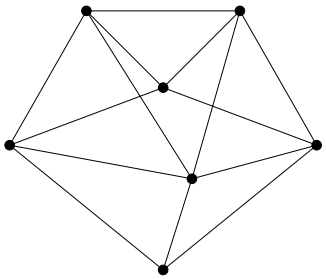
Figuur 2.25



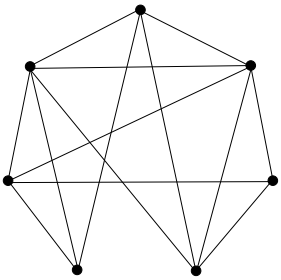
Figuur 2.26



Figuur 2.27



Figuur 2.28

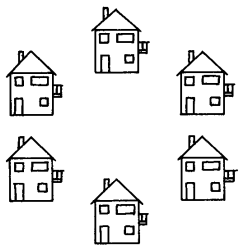


Figuur 2.29

Opgave 2.16. Laat zien dat K_5 en $K_{3,3}$ planair worden als we een lijn verwijderen.

Opgave 2.17. Zes huizen staan in een kring, zoals in Figuur 2.30. Tussen elk tweetal huizen moet een telefoonlijn worden aangelegd, behalve tussen naast elkaar liggende huizen. Kan dit zo dat de telefoonlijnen

elkaar niet kruisen?



Figuur 2.30

Is het mogelijk de telefoonlijnen aan te leggen als alleen naast elkaar liggende en recht tegenover elkaar staande huizen moeten worden verbonden?

Opgave 2.18. Beargumenteer dat elke samenhangende planaire graaf afkomstig kan zijn van een landkaart.

Opgave 2.19. Het kleinste aantal kruisingen dat nodig is om een willekeurige graaf G te tekenen, heet het **kruisingsgetal** van G. Bepaal het kruisingsgetal van K_5 en $K_{3,3}$.

Opgave 2.20. Laat zien dat het mogelijk is 7 steden door middel van wegen met elkaar te verbinden zonder gelijkvloerse kruisingen of splitsingen, met behulp van één viadukt. (Over of onder een viadukt mag meer dan één weg lopen.)

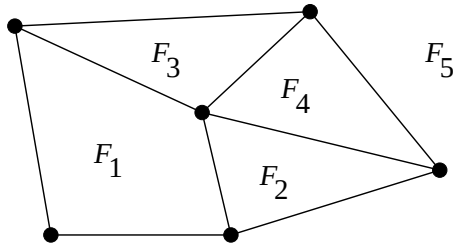
Opgave 2.21. Beargumenteer dat elke planaire Eulergraaf een Eulercykel heeft die zichzelf nergens kruist (maar wel mag raken).

Opgave 2.22. Beargumenteer dat elke graaf in $\mathbb{R}^3$ kan worden "getekend" zonder snijdende lijnen.

2.8. Facetten

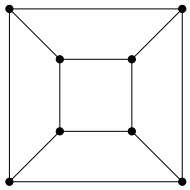
Als we een planaire graaf zonder doorsnijding van lijnen in het platte vlak tekenen, dan wordt het platte vlak in een aantal gebieden verdeeld. Deze gebieden heten de **facetten** van de graaf.

In de volgende graaf zijn de facetten aangegeven met F_1, F_2, F_3, F_4, F_5:

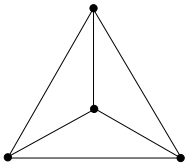


Figuur 2.31

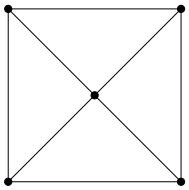
Opgave 2.23. Bepaal voor elk van de volgende grafen: het aantal punten (n), het aantal lijnen (m), en het aantal facetten (f).



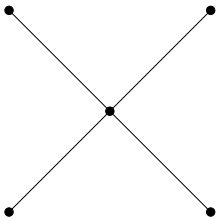
Figuur 2.32



Figuur 2.33

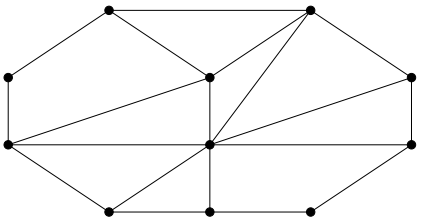


Figuur 2.34



Figuur 2.35

Figuur 2.36



Figuur 2.37

Opgave 2.24. Zij G een planaire graaf met $m(\geq 2)$ lijnen en f facetten. Bewijs dat $f \leq \frac{2}{3}m$.

2.9. De Eulerformule

Uit Opgave 2.23 is misschien een verband duidelijk geworden tussen het aantal punten, het aantal lijnen, en het aantal facetten van een planaire graaf. Dit is de **Eulerformule**:

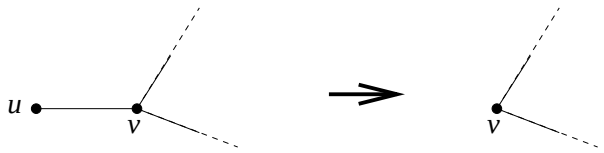
Stelling 2.1. *Voor elke samenhangende niet-lege planaire graaf met n punten, m lijnen, en f facetten geldt:*

$$n + f = m + 2.$$

Bewijs. Door middel van inductie naar $n + m$. Als $n + m = 1$, dan heeft G 1 punt en 0 lijnen. Dus $f = 1$, en daarom $n + f = m + 2$.

Stel nu $n + m > 1$.

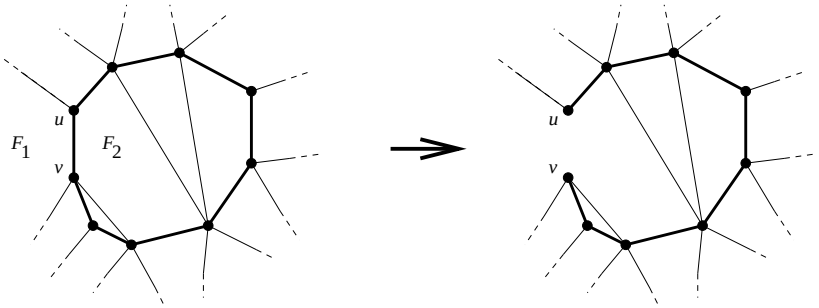
Geval 1: G heeft geen circuits. Dan is G een boom. Dus heeft G een punt u van graad 1. Als we punt u en de lijn die met u is verbonden weglaten, houden we $n-1$ punten en $m-1$ lijnen over. Bovendien blijft het aantal facetten gelijk. Dus volgens de inductiehypothese weten we dat $(n-1) + f = (m-1) + 2$. Dit impliceert $n + f = m + 2$.



Figuur 2.38
Geval 1

Geval 2: G heeft een circuit C. Kies een lijn $\{u, v\}$ op C. Als we nu lijn $\{u, v\}$ uit G verwijderen, blijft de graaf samenhangend. Het

aantal punten blijft n, maar het aantal lijnen wordt $m-1$. Het aantal facetten wordt $f-1$, omdat de twee facetten aan beide kanten van $\{u,v\}$ verenigd worden tot één facet. Volgens de inductiehypothese geldt nu: $n+(f-1)=(m-1)+2$. Dit impliceert $n+f=m+2$.



Figuur 2.39
Geval 2 ∎

Opgave 2.25. Leid, met behulp van de Eulerformule, uit Opgave 2.24 af dat voor elke planaire graaf $G=(V,E)$ met $|E|\geq 2$ geldt:

$$|E|\leq 3|V|-6.$$

Opgave 2.26. Bewijs dat als de graad van elk punt van een graaf $G=(V,E)$ tenminste k is, dan geldt

$$|E|\geq \tfrac{1}{2}k|V|.$$

Opgave 2.27. Bewijs dat elke niet-lege planaire graaf een punt heeft van graad ten hoogste 5.

Opgave 2.28. Leid uit vorige opgave(n) af dat elke planaire graaf 6-kleurbaar is.

Opgave 2.29. Leid uit Opgave 2.25 af dat K_5 niet planair is.

Opgave 2.30. Zij G een planaire graaf met $m(\geq 2)$ lijnen en f facetten en zonder driehoeken. Bewijs dat $f \leq \frac{1}{2}m$.

Opgave 2.31. Leid uit Opgave 2.30 af dat $K_{3,3}$ niet planair is.

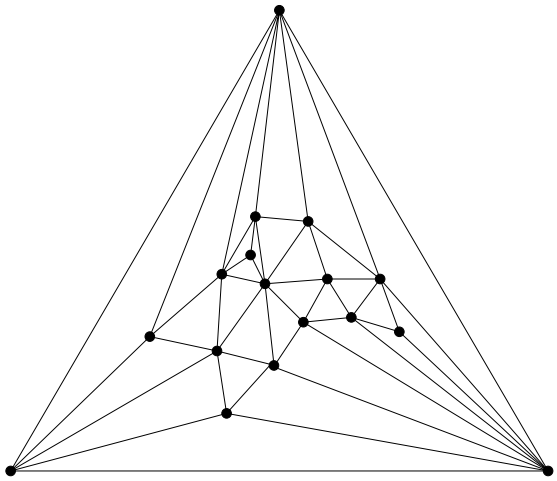
Opgave 2.32. Bewijs dat als G een planaire graaf is met n punten, m lijnen, f facetten, en k componenten, dan geldt

$$n + f = m + k + 1.$$

2.10. 5-kleurbaarheid van planaire grafen

De vierkleurenstelling zegt dat elke planaire graaf 4-kleurbaar is. Dit is een heel lastige stelling, die we hier niet bewijzen.

Opgave 2.33. Kleur de volgende graaf met 4 kleuren:



Figuur 2.40

Wel geven we hier een bewijs van de "vijfkleurenstelling":

Stelling 2.2. *Elke planaire graaf is* 5*-kleurbaar.*

Bewijs. Zij $G = (V, E)$ een planaire graaf. We bewijzen dat G 5-kleurbaar is met inductie naar $|V|$. Als $|V| = 0$, dan is de stelling triviaal.

Stel nu $|V| \geq 1$. Volgens Opgave 2.27 heeft G een punt u van graad ten hoogste 5. Zij G' de graaf die onstaat uit G door u en al de lijnen die in u samenkomen weg te laten.

Geval 1: u heeft hoogstens 4 buren. Volgens de inductiehypothese is G' 5-kleurbaar. Omdat u hoogstens 4 buren heeft, gebruiken deze buren tezamen hoogstens 4 kleuren. Er blijft dus een kleur over om u te kleuren. Dit geeft een correcte kleuring van G.

Geval 2: u heeft precies 5 buren. Omdat K_5 niet planair is, heeft u twee buren die niet met elkaar zijn verbonden; zeg v en w.

Maak nu een graaf G'' uit G' door de punten v en w te identificeren. Dan is G'' weer planair. Volgens de inductiehypothese is G'' 5-kleurbaar. Dit geeft een kleuring van G' waarin v en w dezelfde kleur hebben. Dus de buren van u gebruiken tezamen hoogstens 4 kleuren. Weer blijft er dus een kleur over om u correct te kleuren. ∎

2.11. Toepassingen van puntkleuring van grafen

Er is veel onderzoek gedaan naar methoden om de punten van een graaf te kleuren met zo min mogelijk kleuren. Dit onderzoek is niet alleen gemotiveerd door de toepassing op het kleuren van landkaarten. Er zijn vele andere toepassingen, op problemen die in eerste instantie niet over kleuren gaan, maar die wel in een kleuringsprobleem kunnen worden

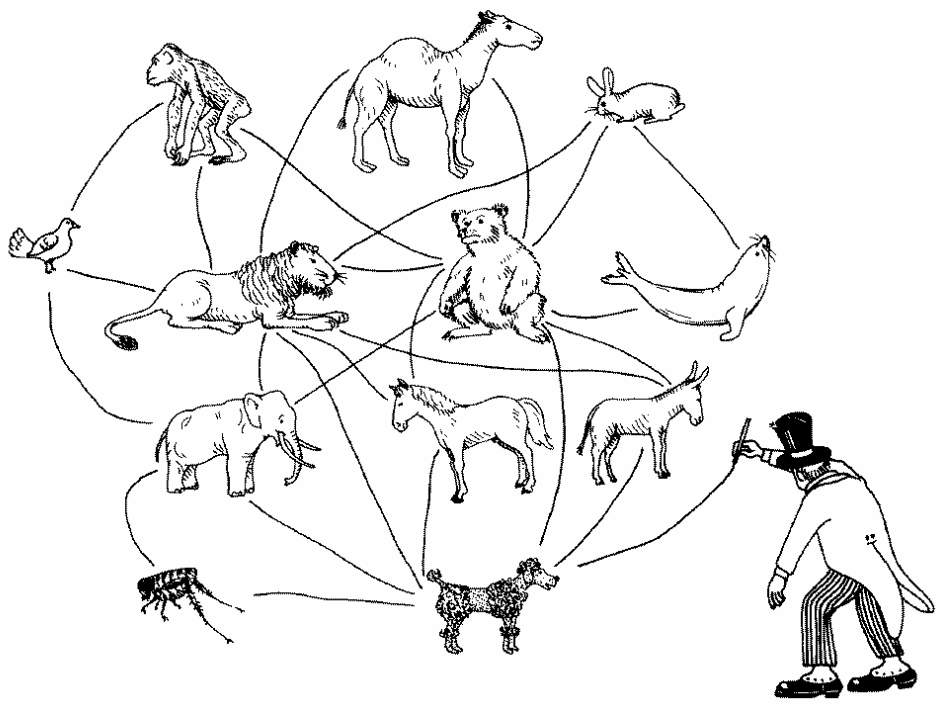
vertaald.

Toepassing 2.1: De opslag van goederen, enz. Stel dat je een circusdirecteur bent en dat je de dieren wilt vervoeren in een aantal wagens, op zo'n manier dat geen twee dieren die in dezelfde wagen worden vervoerd elkaar opeten, en zo dat een minimaal aantal wagens wordt gebruikt.

Dit is eenvoudig te reduceren tot een graafkleuringsprobleem. Een vergelijkbaar probleem doet zich voor bij het opslaan van chemicaliën in een minimaal aantal magazijnruimtes, zo dat geen twee chemicaliën in dezelfde ruimte op een ongewenste manier op elkaar reageren.

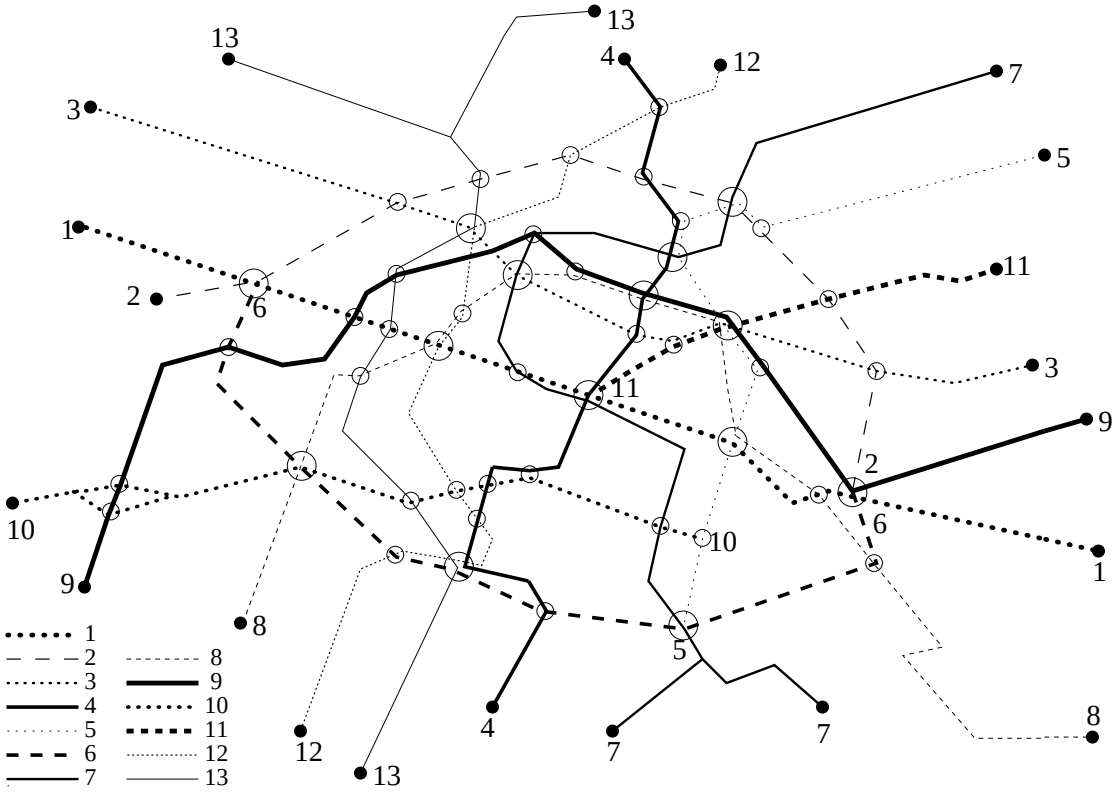
Het probleem doet zich ook voor bij het toewijzen van kamers aan een schoolklas op een schoolreis.

Opgave 2.34. Los het probleem van de circusdirecteur op aan de hand van de graaf in Figuur 2.41.



Figuur 2.41

Toepassing 2.2: Kaartkleuring. Naast het klassieke probleem van het kleuren van de landen van een landkaart, zijn er verschillende andere kaartkleuringsproblemen die met grafen kunnen worden aangepakt. Bekijk bijvoorbeeld de kaart van de Parijse metro:



Figuur 2.42

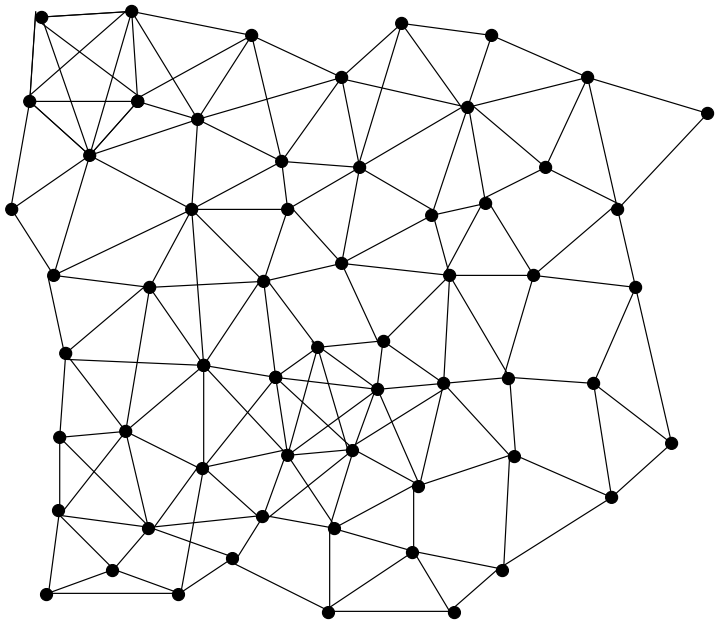
Het metro-netwerk van Parijs

Stel nu dat we een gekleurde kaart willen laten drukken, waarin elk van de 13 lijnen met een kleur wordt aangegeven, zo dat lijnen die elkaar kruisen of een station gemeen hebben, verschillend worden gekleurd, en zo dat een minimaal aantal kleuren wordt gebruikt. Dit kan weer worden vertaald in een graafkleuringsprobleem.

Opgave 2.35. Teken de bij het Parijse metro-netwerk behorende graaf, en bepaal het kleurgetal van deze graaf.

Toepassing 2.3: Het toewijzen van frequenties aan radiostations, mobiele telefoons, enz. Bij het toewijzen van frequenties aan radiostations wil men zo min mogelijk frequenties toewijzen, maar wel

zo dat radiostations die te dicht bij elkaar zitten elkaar niet storen, dus een verschillende frequentie moeten krijgen.

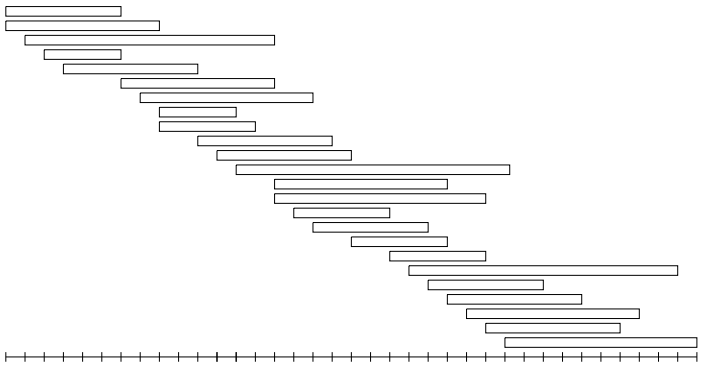


Figuur 2.43
Elkaar storende radiostations

We kunnen nu de radiostations voorstellen door punten van een graaf G, en paren van elkaar storende stations voorstellen door lijnen. Het kleurgetal van G is dan gelijk aan het minimaal aantal benodigde frequenties.

Hetzelfde probleem doet zich voor bij het toewijzen van frequenties aan mobiele telefoons. Hierbij moet het kleurgetal vaak in heel korte tijd worden bepaald.

Toepassing 2.4: Het toewijzen van vakantiehuisjes, hotelkamers, perrons, terminals, enz. Een beheerder van een bungalowpark beheert een aantal vakantiehuisjes. Er is een aantal reserveringen gemaakt, elk voor een periode van een aantal weken, zoals in Figuur 2.44.



Figuur 2.44
Bungalow-reserveringen

Als er k huisjes zijn, dan komt het toewijzen van de huisjes aan de reserveringen neer op het kleuren van de reserveringen met k kleuren op zo'n manier dat elkaar overlappende periodes verschillende kleuren krijgen.

Dit kan weer worden geformuleerd als een graafkleuringsprobleem: stel elke reservering voor door een punt, en maak een lijn tussen twee punten als de reserveringen elkaar overlappen. Dan kunnen de gevraagde reserveringen worden toegewezen als en alleen als het kleurgetal van deze graaf ten hoogste k is.

Opgave 2.36. Bepaal het kleurgetal van de graaf corresponderend met Figuur 2.44.

In feite is er in dit geval een eenvoudige manier om het kleurgetal te bepalen: dit is gelijk aan het maximum aantal reserveringen dat voor eenzelfde week is gemaakt. (Dus we tellen voor elke week hoeveel reserveringen er zijn gemaakt voor die week, en kijken vervolgens in welke week dit aantal het grootst is.)

Het probleem wordt moeilijker als sommige klanten een specifiek vakantiehuisje willen reserveren. Het betekent dat vooraf al een kleuring van sommige reserveringen wordt vastgelegd.

Vergelijkbare problemen doen zich voor bij het toewijzen van hotelkamers aan hotelgasten en bij het toewijzen van terminals aan vliegtuigen of perrons aan treinen of bussen in een trein- of busstation.

Soms wil men een *periodieke* toewijzing: men wil bijvoorbeeld elk uur dezelfde perrons aan dezelfde treinen toewijzen. Ook dit maakt het probleem weer lastiger.

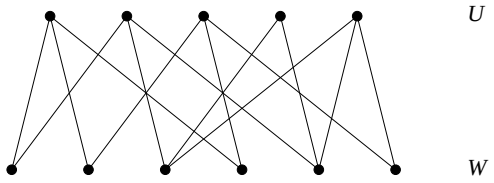
2.12. Bipartiete grafen

Een graaf $G = (V, E)$ heet **bipartiet** als V is op te splitsen in twee verzamelingen, U en W, op zo'n manier dat elke lijn een punt in U en een punt in W bevat.

Dus $G = (V, E)$ is bipartiet als er een deelverzameling U van V bestaat zodanig dat, voor $W := V \setminus U$:

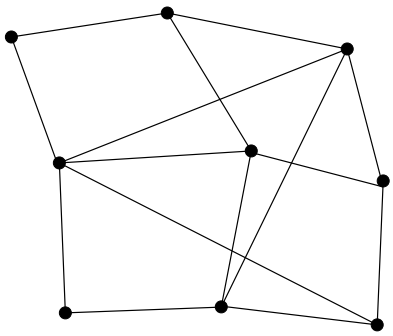
$$E \subseteq \{\{u, w\} \mid u \in U, w \in W\}.$$

Een bipartiete graaf is dus te tekenen als in Figuur 2.45.

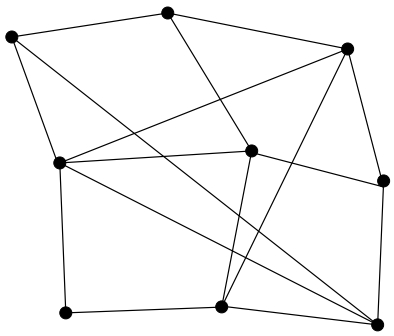


Figuur 2.45
Een bipartiete graaf

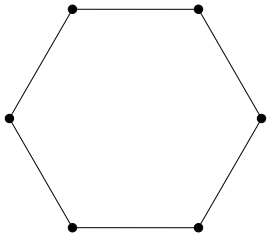
Opgave 2.37. Welke van de volgende grafen zijn bipartiet?



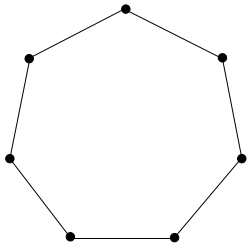
Figuur 2.46



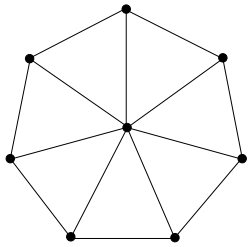
Figuur 2.47



Figuur 2.48



Figuur 2.49



Figuur 2.50

Opgave 2.38. Bewijs dat voor elke graaf G geldt: G is bipartiet $\iff$ $\chi(G) \leq 2$.

Opgave 2.39. Bewijs dat voor elke graaf G geldt: G is bipartiet $\iff$ elk circuit in G heeft even lengte.

2.13. Lijnkleuringen

We gaan nu over tot het probleem van het kleuren van *lijnen* in plaats van *punten*. Dit komt in feite neer op het kleuren van de *punten* van de lijngraaf $L(G)$ van een graaf G.

Een **lijnkleuring** van een graaf $G = (V, E)$ is een functie $f : E \to$

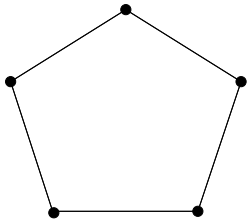
$\{1, \ldots, k\}$ zodanig dat:

(3) voor elke $e, e' \in E$ met $e \neq e'$ en $e \cap e' \neq \emptyset$ geldt $f(e) \neq f(e')$.

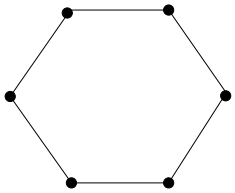
De kleinste k waarvoor zo'n lijnkleuring bestaat, heet het **lijnkleurgetal** van G, genoteerd met $\chi'(G)$.

Een graaf G heet k-**lijnkleurbaar** als $\chi'(G) \leq k$.

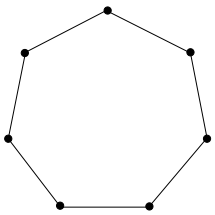
Opgave 2.40. Bepaal het lijnkleurgetal van de volgende grafen:



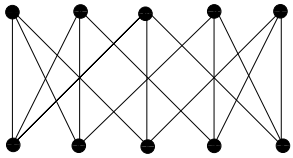
Figuur 2.51



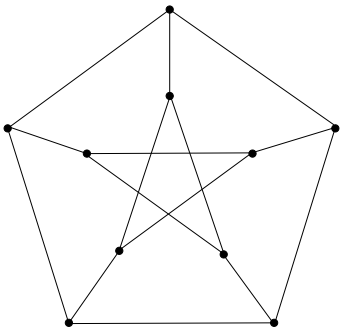
Figuur 2.52



Figuur 2.53



Figuur 2.54



Figuur 2.55

Opgave 2.41. Bewijs dat $\chi'(G) = \chi(L(G))$.

Opgave 2.42. Bepaal het lijnkleurgetal van K_n.

Opgave 2.43. Bewijs dat voor elke graaf G geldt:

$$\chi'(G) \geq \Delta(G). \tag{4}$$

Opgave 2.44. Geef een graaf G met $\chi'(G) > \Delta(G)$.

Opgave 2.45. Geef een 3-reguliere graaf G met $\chi'(G) > 3$.

(Vizing bewees in 1964 dat voor elke graaf G geldt: $\chi'(G) \leq \Delta(G)+1$.)

Opgave 2.46. Bewijs dat voor een k-reguliere graaf G met een oneven aantal punten geldt dat $\chi'(G) > k$.

Opgave 2.47. Laat zien dat elke 3-reguliere Hamiltongraaf G 3-lijnkleurbaar is.

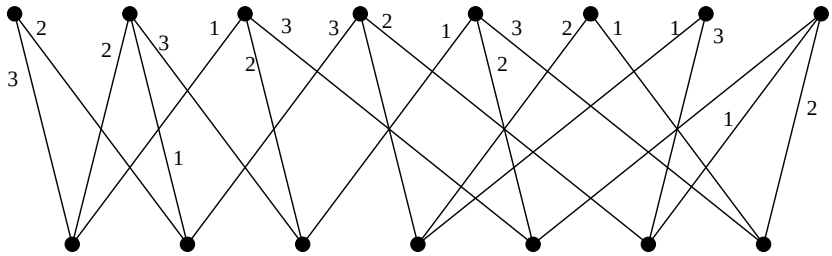
2.14. Het lijnkleurgetal van bipartiete grafen

Kőnig bewees in 1916 een algemene lijnkleuringsstelling voor bipartiete grafen. Wat Kőnig bewees is dat voor bipartiete grafen altijd gelijkheid geldt in (4).

Stelling 2.3. *Voor elke bipartiete graaf G geldt*

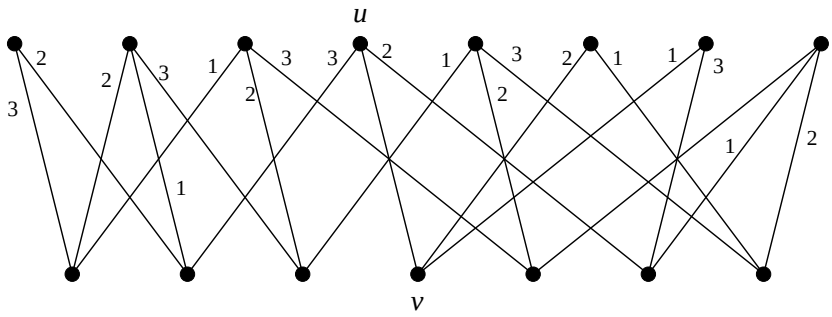
$$\chi'(G) = \Delta(G).$$

Bewijs. Zij $k := \Delta(G)$. Kleur *zo veel mogelijk* lijnen met de kleuren $1, 2, \ldots, k$ op zo'n manier dat, in elk punt v, de in v samenkomende lijnen verschillende kleuren krijgen.



Figuur 2.56

Als op deze manier alle lijnen gekleurd worden, hebben we de stelling bewezen. We mogen dus aannemen dat er tenminste één ongekleurde lijn over blijft. Laat e zo'n lijn zijn, waarbij $e = \{u, v\}$.



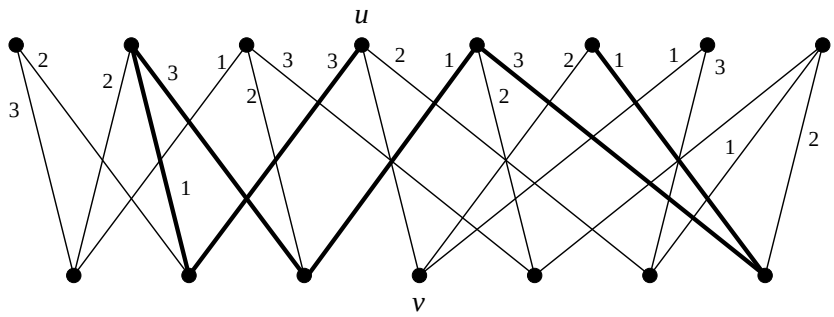
Figuur 2.57

Omdat in u hoogstens k lijnen samenkomen en omdat e nog niet gekleurd is, is er een kleur die nog niet gebruikt is voor de in u samenkomende lijnen. Noem deze kleur i. (In het plaatje: $i = 1$.)

Evenzo bestaat er een kleur, zeg j, welke in v nog niet voorkomt. (In het plaatje: $j = 3$.)

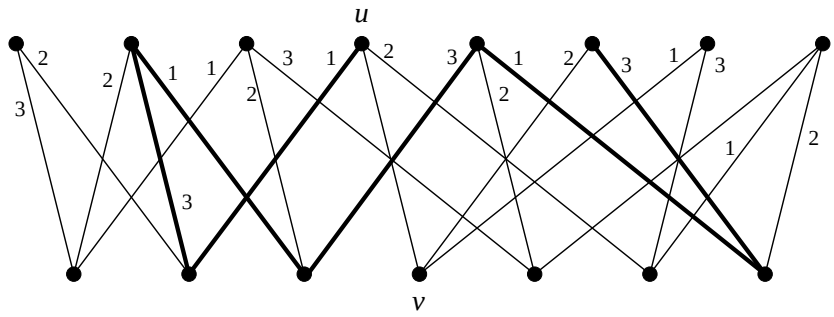
Als nu $i = j$ zou gelden, dan kunnen we lijn e zonder bezwaar de kleur i geven. Maar we namen aan dat we zo veel mogelijk lijnen hadden gekleurd, dus dit zal zich niet voordoen. Dus $i \neq j$.

Beschouw nu alle lijnen van de graaf G welke kleur i of j hebben. Dan kunnen we vanuit u het langste pad P bekijken dat begint in u, en afwisselend lijnen met de kleuren j en i doorloopt:



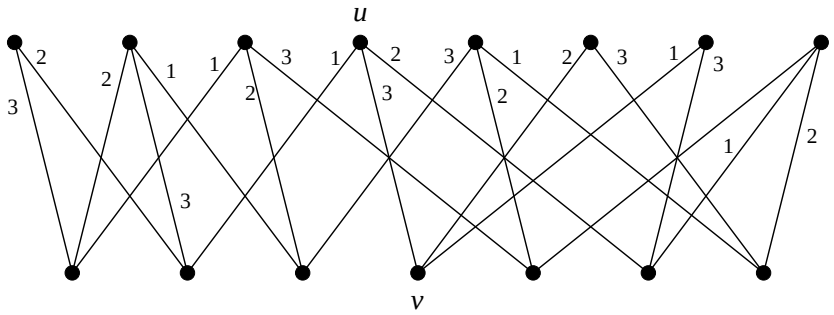
Figuur 2.58
Pad P is dik getekend

Dan kunnen we de kleuren op P omwisselen: wat kleur j had krijgt kleur i, en wat kleur i had krijgt kleur j.



Figuur 2.59

De kleuring blijft op deze manier correct. Bovendien komt kleur j nu vrij in punt u. Kleur j was al vrij in punt v, en dus kunnen we nu lijn e kleuren met kleur j.



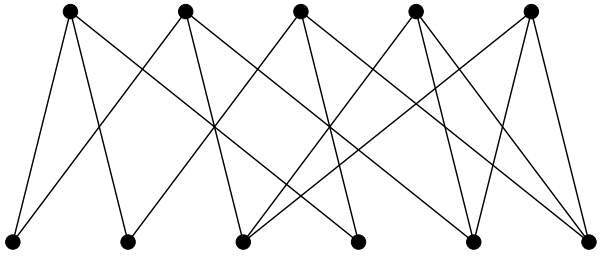
Figuur 2.60

Dus zo hebben we een lijn meer kunnen kleuren.

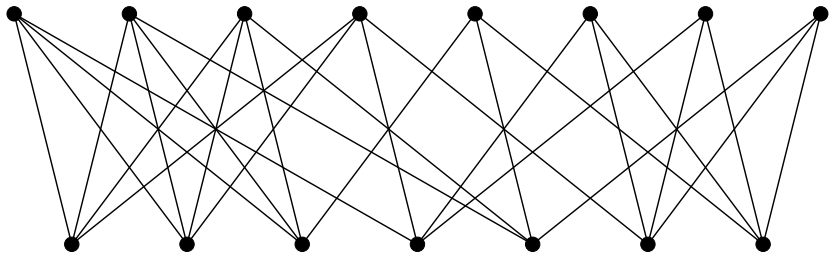
Dit herhalend krijgen we ten slotte een correcte kleuring van alle lijnen van de graaf met k kleuren. ∎

De bewijsmethode van Stelling 2.3 geeft ons ook een methode (algoritme) om zo'n optimaal rooster te vinden: kleur op een willekeurige manier de lijnen zo dat in hetzelfde punt niet tweemaal dezelfde kleur voorkomt. Als we vastlopen, gaan we de kleuren langs een pad omwisselen, om zo een kleur vrij te maken voor een lijn. Dit herhalende, vinden we tenslotte een correcte kleuring van alle lijnen.

Opgave 2.48. Bepaal een kleuring met zo min mogelijk kleuren in de volgende grafen:



Figuur 2.61



Figuur 2.62

Opgave 2.49. Beargumenteer waarom het pad P in het bewijs van Stelling 2.3 niet door punt v kan gaan.

Opgave 2.50. Laat zien dat als een graaf k-lijnkleurbaar is, dan zijn de lijnen zo met k kleuren te kleuren dat elke kleur ongeveer even vaak gebruikt wordt. (Dat wil zeggen: het aantal keer dat de ene kleur gebruikt wordt verschilt hoogstens één van het aantal keer dat een andere kleur gebruikt wordt.)

2.15. Schoolroosters

We passen nu de lijnkleuringsmethoden toe op het bepalen van roosters voor schoolklassen.

Stel we hebben n klassen en m docenten. We nemen als voorbeeld klassen $1, 2, 3, 4, 5, 6$ en docenten a, b, c, d, e, f, g. Men kan in een matrix met een X aangeven aan welke klassen elk van de docenten les moet geven (een les van een uur):

klas:	1	2	3	4	5	6
docent: a	X	X		X		
b	X		X	X	X	
c		X		X	X	
d		X				X
e	X		X		X	X
f	X		X	X		X
g		X	X		X	X

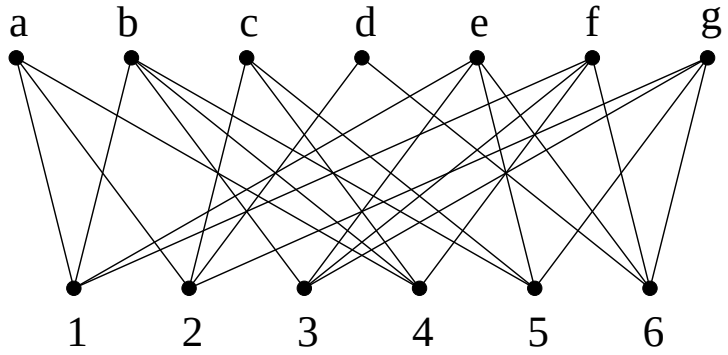
We willen nu een rooster ontwerpen waarin alle lessen binnen k uur worden gegeven, waarbij k zo klein mogelijk is.

In bovenstaand voorbeeld hebben we minimaal 4 uur nodig, bijvoorbeeld omdat klas 1 4 uur les moet krijgen. Kan er een rooster worden opgesteld zo dat alle lessen binnen 4 uur worden afgewikkeld?

Stelling 2.3 impliceert dat dit inderdaad mogelijk is. Om dit in te zien stellen we het probleem voor door een graaf. Deze graaf heeft puntverzameling

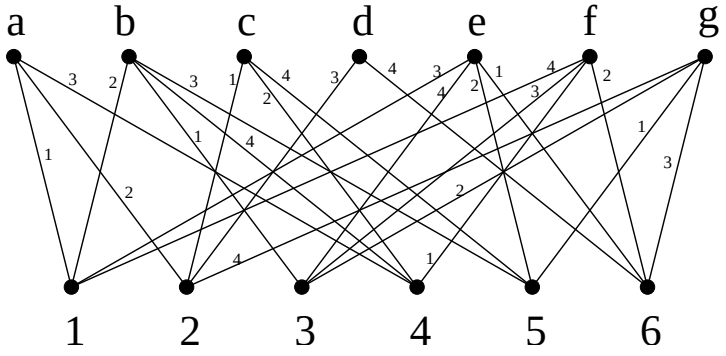
$$V = \{a, b, c, d, e, f, g, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Een punt $u \in \{a, b, c, d, e, f, g\}$ verbinden we met een punt $v \in \{1,2,3,4,5,6\}$ als docent u les moet geven aan klas v. We krijgen dus de volgende bipartiete graaf:



Figuur 2.63

De maximum graad $\Delta(G)$ van deze graaf G is 4. Volgens Stelling 2.3 geldt dus ook: $\chi'(G) = 4$. We kunnen dus de lijnen van G met 4 kleuren kleuren:



Figuur 2.64

Dit geeft ons dan een rooster: in uur 1 worden de lessen van kleur 1 gegeven, in uur 2 de lessen van kleur 2, enzovoort.

Terug naar het schema: we kunnen dus de X'en vervangen door de cijfers 1 t/m 4 zo dat in dezelfde rij of kolom geen twee dezelfde cijfers komen te staan:

klas:	1	2	3	4	5	6
docent: a	1	2		3		
b	2		1	4	3	
c		1		2	4	
d		3				4
e	3		4		2	1
f	4		3	1		2
g		4	2		1	3

Omdat we tenminste 4 uur nodig hebben, is het rooster optimaal.

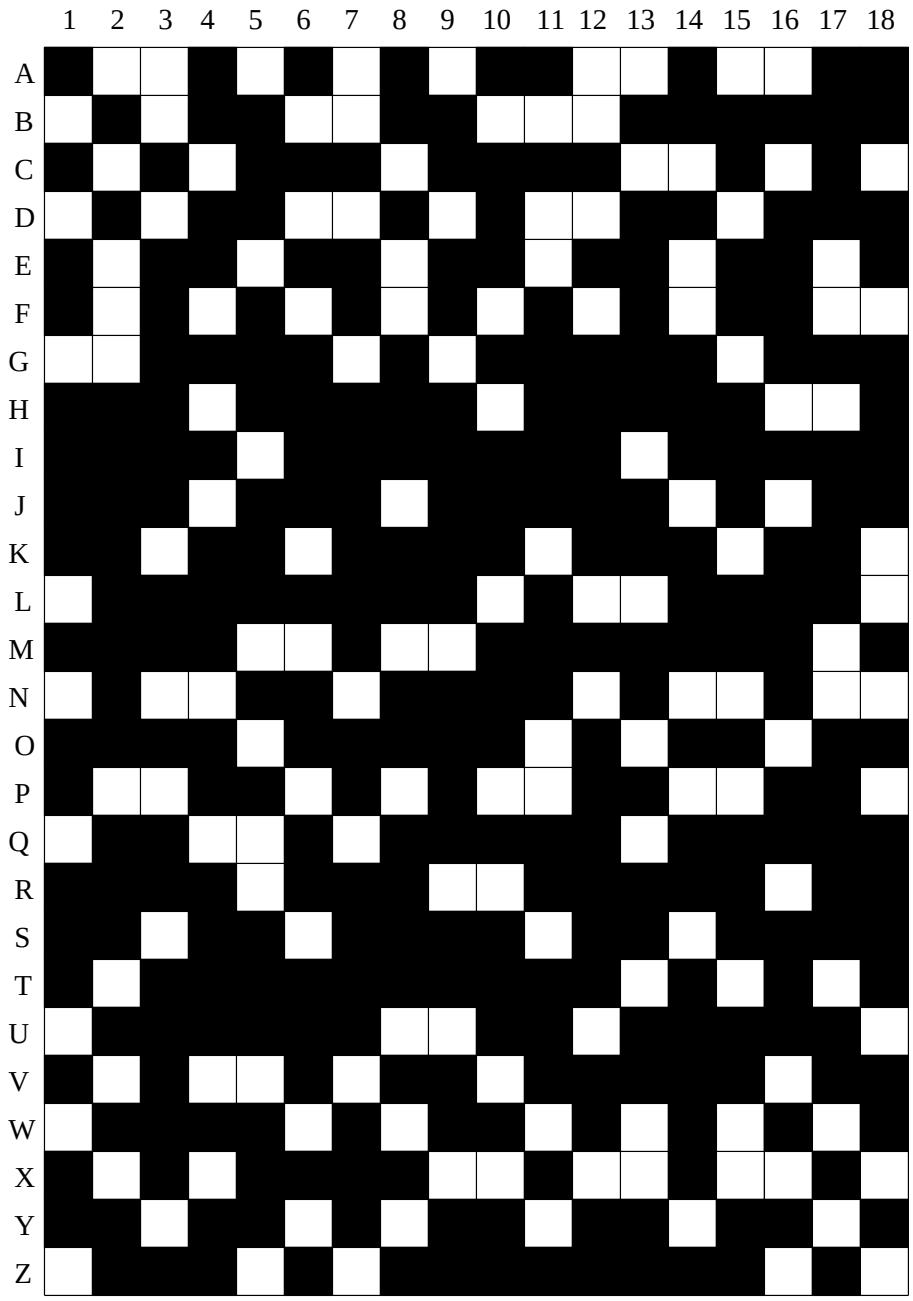
Opgave 2.51. Bepaal een rooster voor het volgende probleem:

X	X	X	X	
X	X		X	X
X	X	X		X
	X	X	X	X
X		X	X	X

Opgave 2.52. Bepaal een rooster voor het volgende probleem:

X		X	X	X		
X	X	X			X	
			X	X	X	X
X	X				X	X
X		X	X	X		
	X		X		X	X
	X	X		X		X

Opgave 2.53. Bepaal een rooster voor het volgende probleem:



Hier worden de te geven lessen aangegeven door open (witte) hokjes.

3. Routeren

3.1. Inleiding

Een ander toepassingsgebied van grafen wordt gevormd door het bepalen van optimale routes. Bekend is het probleem van de *handelsreiziger* die de kortste rondtocht langs een aantal steden wil maken. Recent zijn op dit gebied belangrijke vorderingen gemaakt, en men is nu in staat problemen op te lossen met zo'n 8000 steden.

Dit probleem ziet er misschien vrij esoterisch uit — handelsreizigers zijn vrijwel uitgestorven — maar het probleem doet zich in vele andere gedaanten nog steeds in de praktijk voor, en allemaal hebben we wel eens met zo'n probleem te maken gehad, wellicht onbewust. Wie snel de zaterdagse boodschappen bijeen wil winkelen, lost een handelsreizigersprobleem op. En ook op vakantie ontkom je er niet aan, als je in een vreemde stad efficiënt de vereiste bezienswaardigheden wilt bezichtigen.

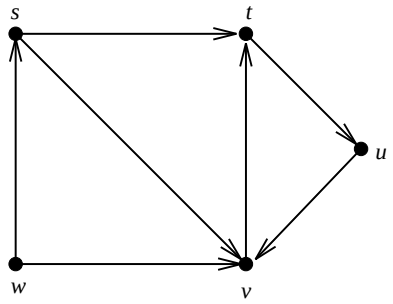
De gevonden methoden vinden ook veel toepassingen in de industrie en de logistiek. De PTT gebruikt de methoden bij het lichten van brievenbussen, de stadsreiniging bij het vuilnisophalen en straatvegen, en Van Gend & Loos bij het routeren van bestelwagens langs klanten. Dergelijke *operations research* technieken worden ook aangeroepen bij het ontwerpen en fabriceren van chips en bij het bepalen van de beste routes van treinen en vliegtuigen.

In dit hoofdstuk zullen we ons vooral richten op het bepalen van een optimale 'stroom' in een *gerichte* graaf. Dit probleem werd in 1954 door T.E. Harris als volgt geformuleerd:

> Consider a rail network connecting two cities by way of a number of intermediate cities, where each link of the network has a number assigned to it representing its capacity. Assuming a steady state condition, find a maximal flow from one given city to the other.

Deze vraag heeft geleid tot de *maximum-stroom-algoritme* van Ford en Fulkerson uit 1956. Deze methode wordt bijvoorbeeld toegepast bij het bepalen van de optimale materieelomloop bij de Nederlandse Spoorwegen.

3.2. Gerichte grafen



Figuur 3.1

Gerichte grafen zijn grafen waarin iedere lijn een richting heeft. De lijn wordt dan meestal aangegeven met een pijl, zoals in Figuur 3.1.

Formeel betekent het dat de lijnen worden aangegeven met *geordende* paren. Dus in plaats van $\{u, v\}$ hebben we (u, v), als de pijl van u naar v loopt. We krijgen dan als definitie:

Definitie. Een **gerichte graaf** D is een paar (V, A) waarbij V een eindige verzameling is en A een verzameling geordende paren (verschillende) elementen van V.

Een element van V heet weer een **punt** van D en een paar in A heet een **pijl**.

De gerichte graaf uit Figuur 3.1 wordt dan gegeven door:

$$(1) \qquad (\{s, t, u, v, w\}, \{(s, t), (s, v), (t, u), (u, v), (v, t), (w, v), (w, s)\}).$$

Als $a = (u, v)$ een pijl is, dan zeggen we dat a **vertrekt uit** u en

aankomt in v. Punt u heet de **staart** van a en punt v de **kop**.

Opgave 3.1. Teken de graaf $(\{1,2,3,4,5,6\}, \{(1,2),(3,1),(1,4),(2,3),(5,2),(6,3),(4,5),(4,6),(6,5)\})$.

Opgave 3.2. Teken de graaf $(\{1,2,3,4,5,6\}, \{(3,1),(4,1),(1,6),(3,2),(2,4),(2,5),(5,2),(6,2),(3,5),(6,3),(5,4),(5,6)\})$.

Opgave 3.3. Zij $D = (V, A)$ een gerichte graaf. Definieer voor elk punt v:

(2) $d^-(v) :=$ aantal pijlen die in v aankomen,
$d^+(v) :=$ aantal pijlen die uit v vertrekken.

Bewijs: $\sum_{v \in V} d^-(v) = \sum_{v \in V} d^+(v)$.

3.3. Paden

Ook in een gerichte graaf kan men spreken van een pad, maar er wordt nu geëist dat elke pijl in de pijlrichting wordt doorlopen. Zo is (w, s, t, u) een pad in de graaf van Figuur 3.1, maar (w, v, s, t) niet.

Formeel wordt een **pad** in een gerichte graaf gedefinieerd als een rij

(3) $(v_0, v_1, \ldots, v_k)$

van punten zodanig dat $v_0, \ldots, v_k$ verschillend zijn en zodanig dat $(v_{i-1}, v_i) \in A$ voor $i = 1, \ldots, k$.

3.4. Stromen

We definiëren nu 'stromen' in een gerichte graaf $D = (V, A)$. Daartoe wordt een **bron** $s \in V$ gekozen, en een **put** of **terminal** t.

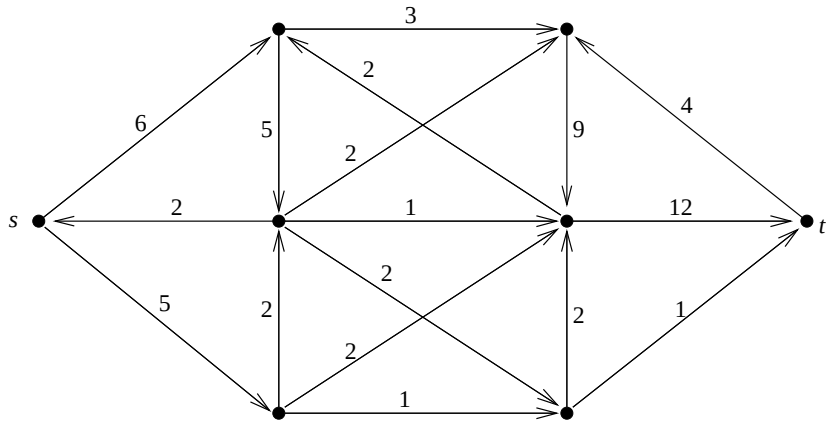
Voor elk punt v definiëren we:

(4) $\delta^-(v) :=$ de verzameling pijlen die in v aankomen,
$\delta^+(v) :=$ de verzameling pijlen die uit v vertrekken.

Definitie. Een **stroom van** s **naar** t, kortweg een $s-t$ **stroom**, is een functie $f : A \to \mathbb{R}_+$ met de eigenschap dat voor elk punt $v \neq s, t$ geldt:

$$(5) \qquad \sum_{a \in \delta^-(v)} f(a) = \sum_{a \in \delta^+(v)} f(a).$$

Deze conditie zegt dat in elk punt $v \neq s, t$, de hoeveelheid stroom die in v aankomt gelijk is aan de hoeveelheid stroom die uit v vertrekt.



Figuur 3.2
Een $s-t$ stroom

Opgave 3.4. Bewijs dat als f en g $s-t$ stromen zijn en $\lambda \geq 0$, dan zijn ook $f+g$ en $\lambda \cdot f$ stromen. (Hierin worden $f+g$ en $\lambda \cdot f$ gedefinieerd door: $(f+g)(a) := f(a) + g(a)$ en $(\lambda \cdot f)(a) := \lambda \cdot f(a)$ voor $a \in A$.)

3.5. De waarde van een stroom

De **waarde** van een $s-t$ stroom f is, per definitie, gelijk aan de netto hoeveelheid stroom die uit s vertrekt. Dat wil zeggen, de waarde is gelijk aan de hoeveelheid uit s vertrekkende stroom *min* de hoeveelheid in s aankomende stroom. In formule:

$$\text{waarde}(f) := \sum_{a \in \delta^+(s)} f(a) - \sum_{a \in \delta^-(s)} f(a). \tag{6}$$

De waarde van de stroom in Figuur 3.2 is dus gelijk aan $6+5-2=9$.

Opgave 3.5. Bewijs dat de waarde gelijk is aan de netto hoeveelheid stroom die in t aankomt; dat wil zeggen:

$$\sum_{a \in \delta^-(t)} f(a) - \sum_{a \in \delta^+(t)} f(a). \tag{7}$$

3.6. Capaciteit

Vaak wordt geëist dat een stroom f een gegeven 'capaciteitsfunctie' $c : A \to \mathbb{R}_+$ niet overschrijdt. Men zegt dat een stroom f **onder** c is als geldt

$$f(a) \leq c(a) \tag{8}$$

voor elke pijl a.

3.7. Het maximum-stroom-probleem

Gegeven de capaciteitsfunctie c, willen we nu zoveel mogelijk stroom f van s naar t sturen, zodat f onder c is. Dit heet het *maximum-stroom-*

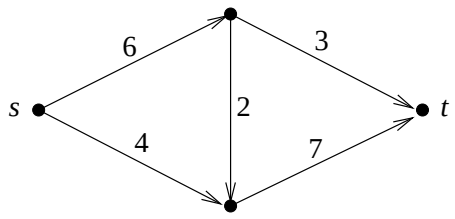
probleem:

(9) gegeven: een gerichte graaf $D = (V, A)$, een bron s en een put t, en een capaciteitsfunctie $c : A \to \mathbb{R}_+$,

bepaal: een $s - t$ stroom f onder c, met waarde(f) zo groot mogelijk.

Een stroom van maximale waarde heet een **maximum stroom**.

Opgave 3.6. Bepaal een maximum $s-t$ stroom in de volgende gerichte graaf, waarbij de getallen de capaciteiten aangeven:



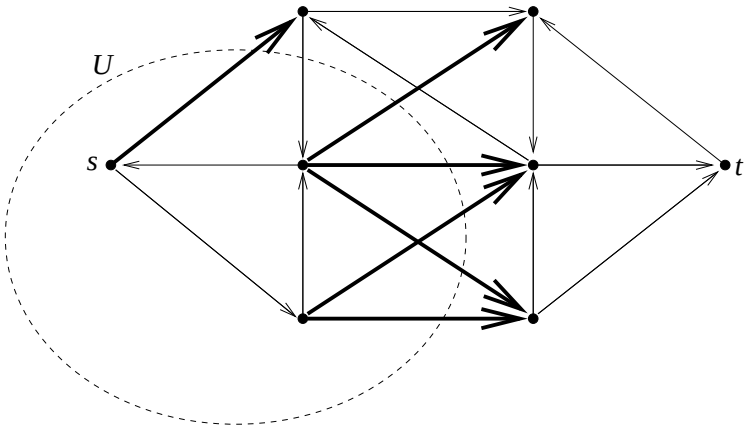
3.8. Snedes

De vorige opgave was klein genoeg om een maximum stroom met wat puzzelen te vinden, maar als de grafen wat groter worden, hebben we een meer systematische methode — een 'algoritme' — nodig. Hierbij blijkt het begrip 'snede' een belangrijke rol te spelen.

Als $U \subseteq V$, definieer $\delta^+(U)$ als de verzameling pijlen welke U verlaten (dus de staart zit in U en de kop zit in $V \setminus U$).

Definieer evenzo $\delta^-(U)$ als de verzameling pijlen die in U aankomen (dus de staart zit in $V \setminus U$ en de kop zit in U).

Als $s \in U$ en $t \in V \setminus U$, dan heet $\delta^+(U)$ een $s - t$ **snede**.



Figuur 3.3
De dik getekende pijlen vormen de $s-t$ snede $\delta^+(U)$.

Opgave 3.7. Bewijs dat voor elke $U \subseteq V$:

(10) $\quad \delta^-(U) = \delta^+(V \setminus U).$

Opgave 3.8. Als f een $s-t$ stroom is en $\delta^+(U)$ een $s-t$ snede, dan geldt:

(11) $\quad \text{waarde}(f) = \sum_{a \in \delta^+(U)} f(a) - \sum_{a \in \delta^-(U)} f(a).$

3.9. De capaciteit van een snede

De **capaciteit** van een snede $\delta^+(U)$ is, per definitie, gelijk aan de som van de $c(a)$ genomen over alle pijlen $a \in \delta^+(U)$:

(12) $\quad \text{cap}(\delta^+(U)) := \sum_{a \in \delta^+(U)} c(a).$

Als $\delta^+(U)$ een $s-t$ snede is, dan is de capaciteit van deze snede een bovengrens voor de maximum waarde van een stroom onder c:

Stelling 3.1. *Voor elke $s-t$ stroom f en elke $s-t$ snede $\delta^+(U)$ geldt:*

(13) $\quad \text{waarde}(f) \leq \text{cap}(\delta^+(U))$.

Bewijs.

$$
\begin{aligned}
(14) \qquad \text{waarde}(f) &= \sum_{a\in\delta^+(s)} f(a) - \sum_{a\in\delta^-(s)} f(a) \\
&= \sum_{a\in\delta^+(s)} f(a) - \sum_{a\in\delta^-(s)} f(a) + \sum_{v\in U\setminus\{s\}} \Big(\sum_{a\in\delta^+(v)} f(a) - \sum_{a\in\delta^-(v)} f(a)\Big) \\
&= \sum_{v\in U} \Big(\sum_{a\in\delta^+(v)} f(a) - \sum_{a\in\delta^-(v)} f(a)\Big) \\
&= \sum_{a\in\delta^+(U)} f(a) - \sum_{a\in\delta^-(U)} f(a) \\
&\overset{\star}{\leq} \sum_{a\in\delta^+(U)} f(a) \overset{\star\star}{\leq} \sum_{a\in\delta^+(U)} c(a) = \text{cap}(\delta^+(U)).
\end{aligned}
$$

∎

Bovendien geldt het volgende:

(15) $\quad$ gelijkheid geldt in (13) $\iff$ $\forall a \in \delta^-(U) : f(a) = 0$ en $\forall a \in \delta^+(U) : f(a) = c(a)$.

Dit volgt direct uit de ongelijkheden $\star$ en $\star\star$ in (14).

Opgave 3.9. Zij f een $s-t$ stroom en $\delta^+(U)$ een $s-t$ snede, zodanig dat $\text{waarde}(f) = \text{cap}(\delta^+(U))$. Bewijs (m.b.v. Stelling 3.1) dat f een maximum stroom is en $\delta^+(U)$ een $s-t$ snede van minimale capaciteit.

3.10. De maximum-stroom-algoritme

We gaan nu de maximum-stroom-algoritme van Ford en Fulkerson beschrijven. We nemen aan dat $c(a) > 0$ voor elke pijl a. Eerst beschrijven we een belangrijke 'subroutine'.

Stroomvermeerderingsalgoritme:

input: een $s-t$ stroom $f \leq c$ in een gerichte graaf $D = (V, A)$.
output: (1) een $s-t$ stroom $f' \leq c$ met waarde(f') > waarde(f),
of (2) een $s-t$ snede $\delta^+(U)$ met cap$(\delta^+(U))$ = waarde(f).

Beschrijving van de algoritme: Maak een hulpgraaf $D_f = (V, A_f)$ als volgt. Voor elke pijl (u, v) van D:

(16) als $f(u,v) < c(u,v)$ dan $(u,v) \in A_f$,
als $f(u,v) > 0$ dan $(v,u) \in A_f$.

Dus als $0 < f(u,v) < c(u,v)$, dan komen zowel (u,v) en (v,u) in A_f voor.

Nu zijn er twee mogelijkheden:

Geval 1: *Er bestaat een pad P van s naar t in D_f.*

Definieer:

(17) $\alpha := \min(\{c(u,v) - f(u,v) \mid (u,v)$ komt in P voor$\} \cup \{f(u,v) \mid (v,u)$ komt in P voor$\})$.

Volgens de definitie van A_f geldt dus $\alpha > 0$.

Voor $(u, v) \in A$, definieer:

(18) $f'(u,v) := f(u,v) + \alpha$ als (u,v) in P voorkomt,
$f'(u,v) := f(u,v) - \alpha$ als (v,u) in P voorkomt.

Op de overige pijlen komt f' overeen met f.

Dan is f' weer een $s-t$ stroom onder c, en er geldt:

(19) waarde(f') = waarde$(f) + \alpha$.

Pad P heet een **stroomvermeerderend pad.**

Geval 2: *Er bestaat geen pad van s naar t in D_f.*

Definieer in dit geval:

(20) $U := \{u \in V \mid \text{er bestaat een pad van } s \text{ naar } u \text{ in } D_f\}$.

Dan geldt: $s \in U$ en $t \notin U$. Dus $\delta^+(U)$ is een $s-t$ snede (in D).

Bovendien volgt uit de definitie van U dat A_f geen pijl heeft die U verlaat. Daarom geldt (vanwege (16)):

(21) als $(u,v) \in \delta^+(U)$, dan $(u,v) \notin A_f$, en dus $f(u,v) = c(u,v)$,
als $(u,v) \in \delta^-(U)$, dan $(v,u) \notin A_f$, en dus $f(u,v) = 0$.

Dan impliceert (15):

(22) $\text{cap}(\delta^+(U)) = \text{waarde}(f)$.

Dus in dit geval is f een maximum stroom. ∎

Dit beschrijft de stroomvermeerderingsalgoritme. De beschrijving van de maximum-stroom-algoritme is nu eenvoudig:

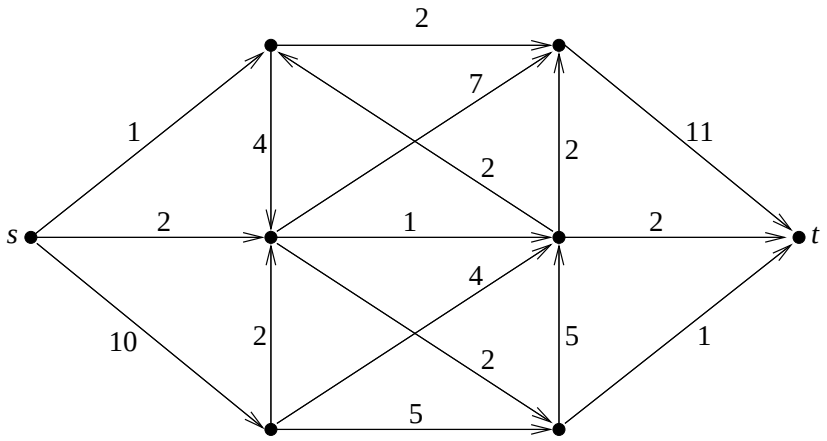
Maximum-stroom-algoritme

input: gerichte graaf $D = (V, A), s, t \in V, c : A \to \mathbb{R}_+$.
output: een maximum $s-t$ stroom f en een $s-t$ snede $\delta^+(U)$ van minimum capaciteit, met $\text{waarde}(f) = \text{cap}(\delta^+(U))$.

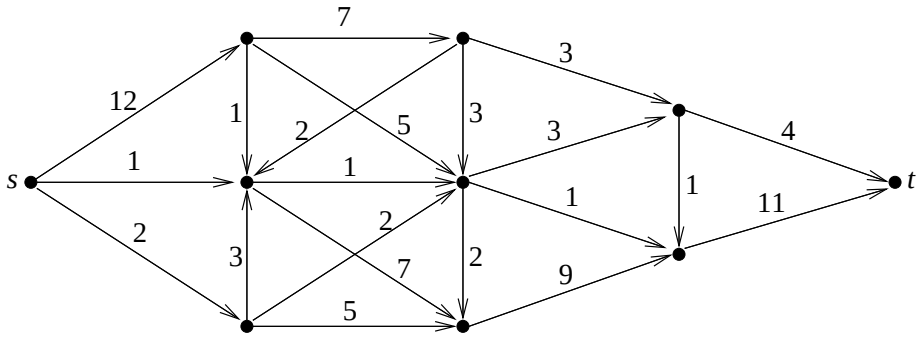
Beschrijving van de algoritme: Begin met de 'nulstroom' f_0 (dus $f_0(a) = 0$ voor elke pijl a). Bepaal met de stroomvermeerderingsalgoritme stromen $f_1, f_2, \ldots, f_N$ zodat $f_{i+1} = f_i'$. We stoppen als de stroomvermeerderingsalgoritme output (2) geeft. ∎

Opgave 3.10. Bepaal met de maximum-stroom-algoritme een maximum $s-t$ stroom en een $s-t$ snede van minimum capaciteit in de volgende gerichte grafen, waarbij de getallen de capaciteiten aangeven:

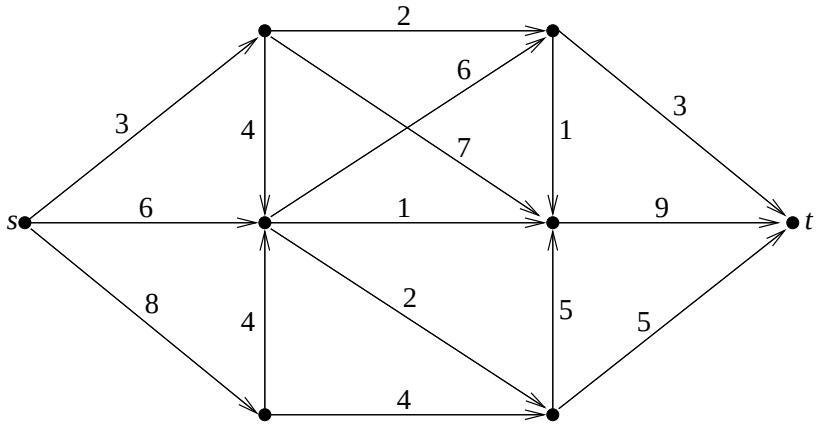
(i)



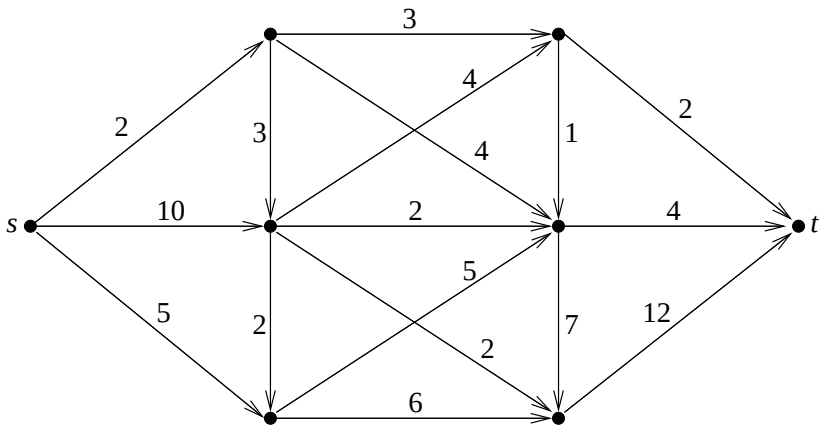
(ii)



(iii)



(iv)



3.11. Stopt de algoritme altijd?

De vraag is nu of de algoritme altijd uiteindelijk stopt; dat wil zeggen, of het aantal iteraties eindig is.

Als alle capaciteiten geheeltallig zijn, dan stopt de methode inderdaad:

Stelling 3.2. *Als elke capaciteit $c(a)$ geheeltallig is, dan stopt de algoritme. De gevonden stroom is geheeltallig.*

Bewijs. Als de capaciteiten geheeltallig zijn, zal het getal α in de stroomvermeerderingsalgoritme steeds ook geheeltallig zijn. Dus de stroomwaarde neemt in elke stap met tenminste 1 toe. Daarom kunnen er niet meer dan $\text{cap}(\delta^+(\{s\}))$ iteraties zijn. ∎

Opgave 3.11. Leid uit Stelling 3.2 af dat als alle capaciteiten rationaal zijn, dan stopt de algoritme ook.

Er zijn echter voorbeelden van grafen met een irrationale capaciteitsfunctie waarin het aantal iteraties niet eindig is. Maar als steeds een kortste pad in de hulpgraaf wordt gekozen, dan stopt de algoritme ook voor willekeurige, reëelwaardige capaciteiten.

3.12. De max-stroom min-snede stelling

De algoritme levert ook de volgende stelling op:

Stelling 3.3 (Max-stroom min-snede stelling)**.** *De maximale waarde van een $s-t$ stroom onder c is gelijk aan de minimale capaciteit van de $s-t$ snedes. In formule:*

$$\max_{f \ s-t \ \text{stroom onder } c} \text{waarde}(f) = \min_{\delta^+(U) \ s-t \ \text{snede}} \text{cap}(\delta^+(U)). \tag{23}$$

Als de capaciteiten geheeltallig zijn, dan bestaat er een geheeltallige maximum stroom.

Bewijs. Aan het einde van het maximum-stroom-algoritme hebben we een stroom en een snede gevonden met de eigenschap dat de stroomwaarde gelijk is aan de snedecapaciteit. Dus geldt (23). ∎

3.13. Het vinden van een <u>minimum</u> stroom

In sommige toepassingen wordt niet een *maximum* stroom gevraagd die *onder* een gegeven capaciteitsfunctie c is, maar een *minimum* stroom die *boven* een gegeven 'vraagfunctie' d is. Een dergelijke toepassing wordt in paragraaf 3.14 beschreven.

Een minimum stroom kan worden gevonden met de volgende aanpassing van de bovenbeschreven methode.

Gegeven is nu een gerichte graaf $D = (V, A)$, punten s en t van D, en een vraagfunctie $d : A \to \mathbb{R}_+$. We willen een $s-t$ stroom f bepalen van minimale waarde die voldoet aan

$$f(a) \geq d(a) \tag{24}$$

voor elke $a \in A$.

Daartoe bepalen we eerst een *willekeurige* stroom f die aan (24) voldoet. (Dit is niet zo moeilijk mits elke pijl a met $d(a) > 0$ in tenminste een $s-t$ pad voorkomt (Opgave 3.12.)

Vervolgens passen we iteratief de volgende *stroomverminderingsalgoritme* toe:

Breid $D = (V, A)$ uit tot een hulpgraaf $D_f = (V, A_f)$ door voor elke pijl (u, v) waarvoor $f(u, v) > d(u, v)$ geldt, een pijl (v, u) toe te voegen.

Als de nieuwe graaf een pad P van t naar s heeft, dan kunnen we een nieuwe stroom f' als volgt maken. Zij α het minimum van de waarden $f(u, v) - d(u, v)$ over de pijlen (u, v) waarvoor (v, u) in P voorkomt.

Definieer dan voor $(u, v) \in A$:

$$
\begin{aligned}
(25) \qquad & f'(u, v) := f(u, v) + \alpha \text{ als } (u, v) \text{ in } P \text{ voorkomt,} \\
& f'(u, v) := f(u, v) - \alpha \text{ als } (v, u) \text{ in } P \text{ voorkomt.}
\end{aligned}
$$

Op de overige pijlen komt f' overeen met f.

Dit herhalende tot er geen pad van t naar s meer bestaat in D_f, leidt dit tot een minimum stroom $f \geq d$. Dit kan op dezelfde manier worden bewezen (met behulp van een snede) als in paragraaf 3.10.

Opgave 3.12. Zij $D = (V, A)$ een gerichte graaf, $s, t \in V$, en $d : A \to \mathbb{R}_+$, zodanig dat elke pijl a met $d(a) > 0$ in tenminste een $s - t$ pad voorkomt. Beschrijf een methode om een $s-t$ stroom $f \geq d$ te vinden.

Opgave 3.13. Bepaal voor elk van de grafen van Opgave 3.10 een minimum stroom, waarbij de getallen nu de *vraag* aangeven.

3.14. Materieelomloop

De treinen Amsterdam-Vlissingen v.v. van de NS hebben de volgende dienstregeling (van maandag t/m vrijdag):

treinnummer		2123	2127	2131	2135	2139	2143	2147	2151	2155	2159	2163	2167	2171	2175	2179	2183	2187	2191
Amsterdam	V		6.48	7.55	8.56	9.56	10.56	11.56	12.56	13.56	14.56	15.56	16.56	17.56	18.56	19.56	20.56	21.56	22.56
Rotterdam	A		7.55	8.58	9.58	10.58	11.58	12.58	13.58	14.58	15.58	16.58	17.58	18.58	19.58	20.58	21.58	22.58	23.58
Rotterdam	V	7.00	8.01	9.02	10.03	11.02	12.03	13.02	14.02	15.02	16.00	17.01	18.01	19.02	20.02	21.02	22.02	23.02	
Roosendaal	A	7.40	8.41	9.41	10.43	11.41	12.41	13.41	14.41	15.41	16.43	17.43	18.42	19.41	20.41	21.41	22.41	23.54	
Roosendaal	V	7.43	8.43	9.43	10.45	11.43	12.43	13.43	14.43	15.43	16.45	17.45	18.44	19.43	20.43	21.43			
Vlissingen	A	8.38	9.38	10.38	11.38	12.38	13.38	14.38	15.38	16.38	17.40	18.40	19.39	20.38	21.38	22.38			

treinnummer		2108	2112	2116	2120	2124	2128	2132	2136	2140	2144	2148	2152	2156	2160	2164	2168	2172	2176
Vlissingen	V			5.30	6.54	7.56	8.56	9.56	10.56	11.56	12.56	13.56	14.56	15.56	16.56	17.56	18.56	19.55	
Roosendaal	A			6.35	7.48	8.50	9.50	10.50	11.50	12.50	13.50	14.50	15.50	16.50	17.50	18.50	19.50	20.49	
Roosendaal	V		5.29	6.43	7.52	8.53	9.53	10.53	11.53	12.53	13.53	14.53	15.53	16.53	17.53	18.53	19.53	20.52	21.53
Rotterdam	A		6.28	7.26	8.32	9.32	10.32	11.32	12.32	13.32	14.32	15.32	16.32	17.33	18.32	19.32	20.32	21.30	22.32
Rotterdam	V	5.31	6.29	7.32	8.35	9.34	10.34	11.34	12.34	13.35	14.35	15.34	16.34	17.35	18.34	19.34	20.35	21.32	22.34
Amsterdam	A	6.39	7.38	8.38	9.40	10.38	11.38	12.38	13.38	14.38	15.38	16.40	17.38	18.38	19.38	20.38	21.38	22.38	23.38

Tabel 1. Dienstregeling Amsterdam-Vlissingen v.v.

De treinen stoppen bij meer stations, maar Rotterdam en Roosendaal zijn de enige plaatsen waar onderweg materieel kan worden aan- of afgekoppeld. Dit kan ook aan de eindpunten Amsterdam en Vlissingen.

Voor elk van de deeltrajecten heeft NS een schatting gemaakt van het aantal passagiers, gesplitst naar eerste en tweede klas:

treinnummer	2123	2127	2131	2135	2139	2143	2147	2151	2155	2159	2163	2167	2171	2175	2179	2183	2187	2191
Amsterdam-Rotterdam		*47* 340	*100* 616	*61* 407	*41* 336	*31* 282	*46* 287	*42* 297	*33* 292	*39* 378	*84* 527	*109* 616	*78* 563	*44* 320	*28* 184	*21* 161	*28* 190	*10* 123
Rotterdam-Roosendaal	*4* 58	*35* 272	*52* 396	*41* 364	*26* 240	*25* 221	*27* 252	*27* 267	*28* 287	*52* 497	*113* 749	*98* 594	*51* 395	*29* 254	*22* 165	*13* 130	*8* 77	
Roosendaal-Vlissingen	*14* 328	*19* 181	*27* 270	*26* 237	*24* 208	*32* 188	*15* 180	*21* 195	*23* 290	*41* 388	*76* 504	*67* 381	*43* 276	*20* 187	*15* 136			

treinnummer	2108	2112	2116	2120	2124	2128	2132	2136	2140	2144	2148	2152	2156	2160	2164	2168	2172	2176
Vlissingen-Roosendaal			*28* 138	*100* 448	*48* 449	*57* 436	*24* 224	*19* 177	*19* 184	*17* 181	*19* 165	*22* 225	*39* 332	*30* 309	*19* 164	*15* 142	*11* 121	
Roosendaal-Rotterdam		*16* 167	*88* 449	*134* 628	*57* 397	*71* 521	*34* 281	*26* 214	*22* 218	*21* 174	*25* 206	*35* 298	*51* 422	*32* 313	*20* 156	*14* 155	*14* 130	*7* 64
Rotterdam-Amsterdam	*7* 61	*26* 230	*106* 586	*105* 545	*56* 427	*75* 512	*47* 344	*36* 303	*32* 283	*34* 330	*39* 338	*67* 518	*74* 606	*37* 327	*23* 169	*18* 157	*17* 154	*11* 143

Tabel 2. Aantal vereiste eerste (cursief) en tweede klas zitplaatsen

De vraag is nu: Wat is het minimum aantal treinstellen dat nodig is om deze dienst uit te voeren op zo'n manier dat steeds voldoende zitplaatsen worden aangeboden?

Om deze vraag te beantwoorden moeten we iets meer over de treinstellen weten. In dit geval gaat het om zgn. 'koplopers'. Dit zijn tweerichting-treinstellen, die onderling aan elkaar kunnen worden gekoppeld tot langere treinen. Per treinstel zijn er 38 eerste klas- en 163 tweede klas-zitplaatsen.

3.15. Bepalen van de optimale materieelomloop

De optimale materieelomloop kan worden bepaald door het probleem te modelleren als een minimum-stroom-probleem, en dit op te lossen met de bovenbeschreven methode.

Hiertoe maken we een gerichte graaf $D = (V, A)$ als volgt (zie Figuur 3.4).

Voor elk station $X \in \{$Amsterdam, Rotterdam, Roosendaal, Vlissingen$\}$ en voor elk tijdstip t waarop een trein aankomt of vertrekt in X, introduceren we een punt, dat we aangeven met het paar (X, t). De punten komen dus overeen met de 198 tijdstippen die in de dienstregeling (Tabel 1) vermeld staan.

Voor elke treinrit, die uit station X op tijdstip t vertrekt en in station Y op tijdstip t' aankomt, maken we een pijl van punt (X, t) naar punt (Y, t'). Zo loopt er bijvoorbeeld een pijl van (Roosendaal,7.43) naar (Vlissingen,8.38).

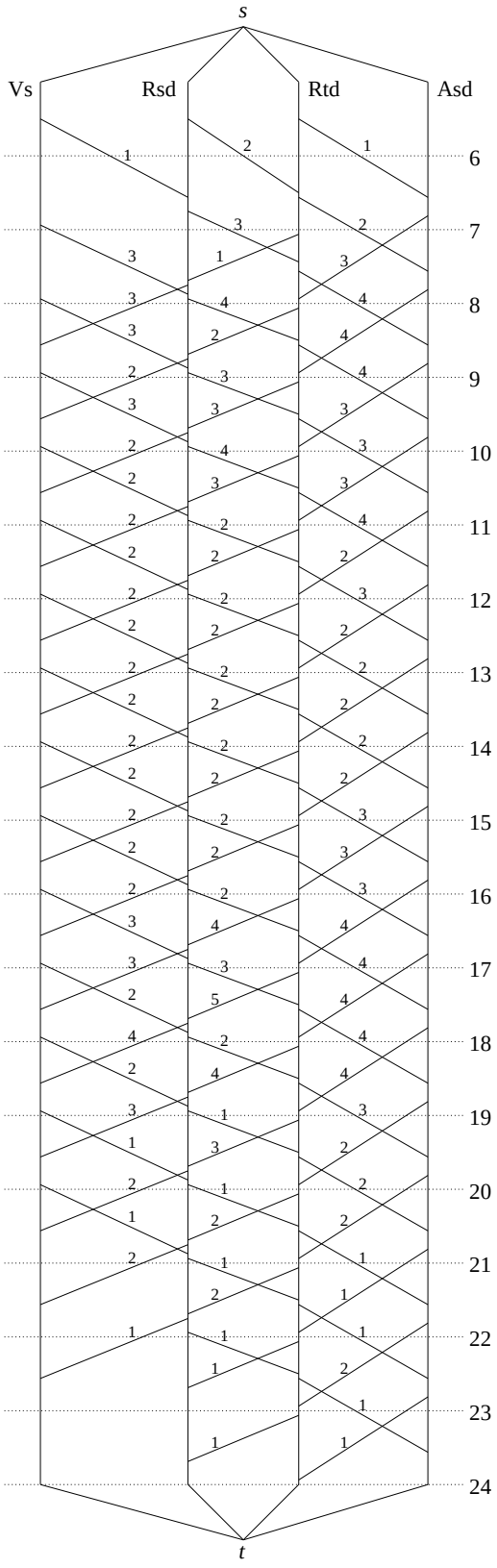
Voor elk station X en elk tweetal opvolgende tijdstippen t, t' waarop een trein aankomt of vertrekt in X, trekken we een pijl van (X, t) naar (X, t'). Dus in ons voorbeeld lopen er pijlen o.a.:

(26) van (Rotterdam,8.01) naar (Rotterdam,8.32),
van (Rotterdam,8.32) naar (Rotterdam,8.35),
van (Vlissingen,8.38) naar (Vlissingen,8.56).

Tenslotte is er een 'bron' r en een 'put' s. Voor elk station X is er een

pijl van r naar (X, t), waarbij t het eerste tijdstip is waarop een trein in X aankomt of vertrekt. En er is een pijl van (X, t') naar s, waarbij t' het laatste tijdstip is waarop een trein in X aankomt of vertrekt.

Zo is er een pijl van r naar (Roosendaal,5.29) en een pijl van (Roosendaal,23.54) naar s.



Figuur 3.4
alle pijlen zijn naar beneden gericht; de getallen geven de vraagfunctie aan; deze is 0 als deze niet is aangegeven

We kunnen nu een materieelomloop aangeven door middel van een stroom $f : A \to \mathbb{Z}_+$, waarbij $f(a)$ de volgende betekenis heeft. Als a correspondeert met een treinrit, dan geeft $f(a)$ het aantal treinstellen aan dat voor deze treinrit wordt ingezet. Als a een pijl is van (X, t) naar (X, t'), dan is $f(a)$ het aantal treinstellen dat op station X aanwezig is tussen de tijdstippen t en t'. De waarde van $f(a)$ op een pijl $a = (r, (X, t))$ is gelijk aan het aantal treinstellen dat op station X klaar staat aan het begin van de dag. Als $a = ((X, t), s)$ dan is $f(a)$ het aantal treinstellen op station X aan het einde van de dag.

Om voldoende zitplaatsen te bieden, moet de stroom f aan een vraagfunctie d voldoen:

(27) $$f(a) \geq d(a).$$

Hierin is $d(a)$ gelijk aan het minimum aantal treinstellen dat voldoende zitplaatsen heeft om aan de vraag op treinrit a te voldoen. Met behulp van de Tabel 2 krijgen we de volgende vraagfunctie (op basis van 38 eerste klas- en 163 tweede klas-zitplaatsen):

treinnummer	2123	2127	2131	2135	2139	2143	2147	2151	2155	2159	2163	2167	2171	2175	2179	2183	2187	2191
Amsterdam-Rotterdam		3	4	3	3	2	2	2	2	3	4	4	4	2	2	1	2	1
Rotterdam-Roosendaal	1	2	3	3	2	2	2	2	2	4	5	4	3	2	2	1	1	
Roosendaal-Vlissingen	3	2	2	2	2	2	2	2	2	3	4	3	2	2	1			

treinnummer	2108	2112	2116	2120	2124	2128	2132	2136	2140	2144	2148	2152	2156	2160	2164	2168	2172	2176
Vlissingen-Roosendaal			1	3	3	3	2	2	2	2	2	2	3	2	2	1	1	
Roosendaal-Rotterdam		2	3	4	3	4	2	2	2	2	2	2	3	2	1	1	1	1
Rotterdam-Amsterdam	1	2	4	4	3	4	3	2	2	3	3	4	4	3	2	1	1	1

Tabel 4. Ondergrenzen voor het aantal treinstellen

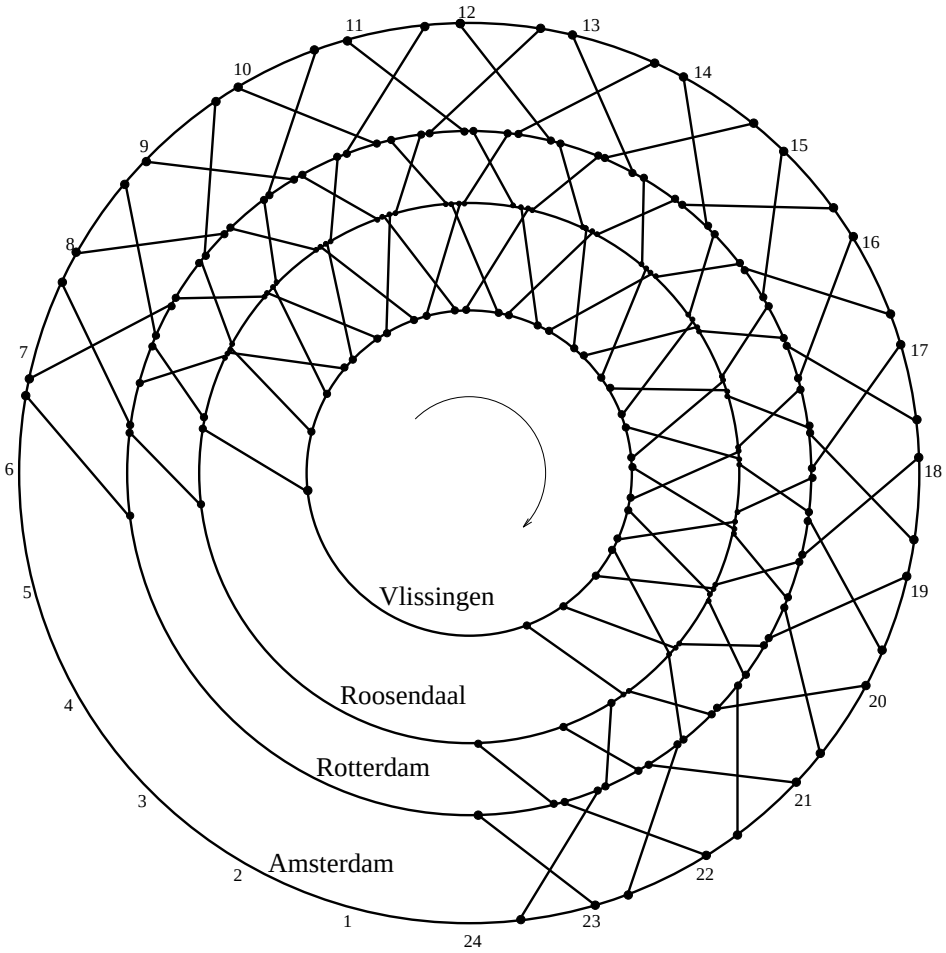
Als a niet met een treinrit correspondeert, dan is $d(a) = 0$.

Nu is het minimum aantal treinstellen dat nodig is gelijk aan de minimum waarde van een stroom $f \geq d$. Deze minimum stroom kan worden gevonden met de methode uit 3.13.

Opgave 3.14. Bepaal de optimale materieelomloop voor bovenstaande gegevens.

3.16. Varianten

Op een vrij directe manier kan het model worden gewijzigd en uitgebreid om ook andere problemen aan te kunnen. In plaats van het minimaliseren van het aantal treinstellen kan men ook het aantal treinstelkilometers minimaliseren. Ook kunnen bovengrenzen worden gesteld aan de lengte van de treinen. Hiertoe dient de minimum-stroom-algoritme te worden aangepast.



Figuur 3.5

Bovendien kan het model worden aangepast om er voor te zorgen dat op elk station het aantal treinstellen aan het einde van de dag gelijk

is aan het aantal aan het begin van de dag. Dit kan door de punten r en s te verwijderen, en voor elk station X een pijl te trekken van (X, t') naar (X, t), waarbij t' en t het laatste en het eerste tijdstip zijn waarop iets gebeurt in station X (wat betreft Amsterdam-Vlissingen). De corresponderende graaf is getekend in Figuur 3.5.

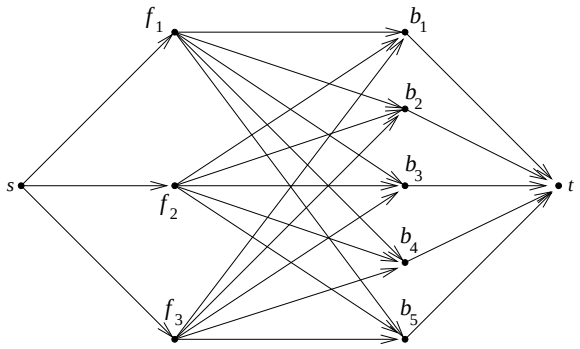
In plaats van één lijn, kan men meerdere lijnen beschouwen, waarop materieel onderling kan worden uitgewisseld. Zo rijden de koplopers ook van Amsterdam, Den Haag en Rotterdam naar Enschede, Leeuwarden en Groningen (met splitsingen en samenvoegingen onderweg). Het geeft een grote graaf, maar met de bovenbeschreven methode kan een optimale materieelomloop snel worden bepaald.

Het probleem wordt echter een stuk lastiger als verschillende treintypes onderling gekoppeld kunnen worden, bijvoorbeeld koplopers met 3 'bakken' en koplopers met 4 'bakken', elk met een verschillende capaciteit. In dat geval krijgt men 2 stromen (de stroom van de 'drietjes' en de stroom van de 'viertjes'), die simultaan aan een gegeven vraag moeten voldoen.

3.17. Het transportprobleem

De beschreven methode kan ook worden toegepast op het zgn. transportprobleem: Er zijn m fabrieken, die alle hetzelfde produkt produceren, en n klanten die dit produkt afnemen. Fabriek f_i kan elke maand s_i ton van het produkt produceren. Klant b_j heeft elke maand d_j ton nodig. Van fabriek f_i naar klant b_j kan elke maand ten hoogste $c_{i,j}$ ton worden vervoerd. De vraag is of in de behoefte van de klanten kan worden voorzien.

Om dit probleem op te lossen met de maximum-stroom-algoritme, maken we de volgende gerichte graaf (voor $m = 3$, $n = 5$):



Figuur 3.6
Het transportprobleem als stroomprobleem

We definiëren een capaciteitsfunctie op de pijlen:

$$
\begin{array}{lll}
c(s, f_i) & := s_i & \text{voor } i = 1, \ldots, m, \\
c(f_i, b_j) & := c_{i,j} & \text{voor } i = 1, \ldots, m; j = 1, \ldots, n, \\
c(b_j, t) & := d_j & \text{voor } j = 1, \ldots, n.
\end{array} \tag{28}
$$

Dan geldt:

(29) in de behoefte van de klanten kan worden voorzien $\Longleftrightarrow$ er bestaat een $s-t$ stroom $f \leq c$ met waarde $d_1 + \cdots + d_n$.

Als f een stroom is van waarde $d_1 + \cdots + d_n$, dan is de stroom op de pijl (f_i, b_j) gelijk aan het aantal ton dat maandelijks door fabriek f_i aan klant b_j wordt geleverd. De stroom op pijl (s, f_i) is het aantal ton dat maandelijks door fabriek f_i moet worden geproduceerd.

Er bestaat geen stroom van waarde groter dan $d_1 + \cdots + d_n$ (omdat $c(\delta^-(t)) = d_1 + \cdots + d_n$). We kunnen dus de stroom bepalen met de maximum-stroom-algoritme.

Opgave 3.15. Los het transportprobleem op met de maximum-stroom-algoritme, voor de volgende data: $m = n = 3, s_1 = 13, s_2 = 9, s_3 = 4, d_1 = 3, d_2 = 7, d_3 = 12$,

$c_{i,j}$	$j=1$	$j=2$	$j=3$
$i=1$	2	0	8
$i=2$	3	8	3
$i=3$	0	1	3

3.18. De stelling van Menger

De resultaten over stromen kunnen ook worden toegepast op paden in gerichte grafen. In het bijzonder kan de stelling van Menger (1927) worden afgeleid, een fundamentele stelling uit de grafentheorie.

Zij $D = (V, A)$ een gerichte graaf en $s, t \in V$. Twee paden P en Q in D heten **pijl-disjunkt** als zij geen pijl gemeenschappelijk hebben. (Ze mogen wel punten gemeenschappelijk hebben.)

De relatie met stromen wordt gegeven door:

(30) D bevat k paarsgewijs pijl-disjunkte $s-t$ paden $\iff$ er bestaat een $s-t$ stroom f in D van waarde k en $f(a) \leq 1$ voor elke pijl a.

Opgave 3.16. Bewijs (30).

Nu geldt:

Stelling 3.4 (Stelling van Menger)**.** *Het maximum aantal paarsgewijs pijl-disjunkte $s-t$ paden is gelijk aan de minimale cardinaliteit van een $s-t$ snede.*

Bewijs. Definieer een capaciteitsfunctie $c : A \to \mathbb{R}$: $c(a) := 1$ voor elke pijl a. Vanwege (30) is het maximale aantal paarsgewijs pijl-disjunkte $s-t$ paden gelijk aan de maximale waarde van een $s-t$ stroom $f \leq c$.

De max-stroom min-snede stelling zegt nu dat deze laatste waarde gelijk is aan de minimale capaciteit van een $s-t$ snede. Omdat $c(a) = 1$ voor

elke pijl a, is dit gelijk aan de minimale cardinaliteit van een $s-t$ snede. ∎

We kunnen hieruit een variant afleiden voor *punt*-disjunkte paden. Noem twee $s-t$ paden P en Q **punt-disjunkt** als P en Q geen punten $v \neq s,t$ gemeenschappelijk hebben.

Noem een verzameling U van punten een $s-t$ **punt-snede** als $s,t \notin U$ en elk $s-t$ pad snijdt U.

Gevolg 3.4a (Stelling van Menger — variant)**.** *Het maximale aantal paarsgewijs punt-disjunkte $s-t$ paden is gelijk aan de minimale cardinaliteit van een $s-t$ punt-snede.*

Opgave 3.17. Leid de punt-disjunkte variant van de stelling van Menger af uit de pijl-disjunkte variant.

Opgave 3.18. Leid de pijl-disjunkte variant van de stelling van Menger af uit de punt-disjunkte variant.