

Tentamen **Kansrekening en Statistiek (2WS04)**,
dinsdag 5 augustus 2008, van 14.00–17.00 uur.

Dit is een tentamen met gesloten boek. De uitwerkingen van de opgaven dienen duidelijk en overzichtelijk te worden opgeschreven. Elk onderdeel levert 10 punten op. Het cijfer is het totaal van de behaalde punten gedeeld door 15, afgerond op een geheel getal.

Op elk ingeleverd vel de naam van de student, de code van het college en de datum van het tentamen noteren.

U mag gebruik maken van een onbeschreven Statistisch Compendium en een (grafische) rekenmachine.

1. Een spel bestaat uit het blindelings plaatsen van een pijltje op een dartbord met een straal van 25 cm.
 - a Beschrijf de uitkomstenruimte van dit spel en geef een geschikte kansverdeling.
 - b Zij E de eventualiteit dat de pijl binnen 5 cm van de roos geplaatst wordt. Geef een goede benadering van de kans dat bij 1000 spellen E tenminste 50 keer optreedt.
 - c Zij A de afstand in cm tot de roos. Wat is de kansverdeling van A ? Bereken $\mathbb{E}A$ en $\text{Var } A$.
 - d Het spel wordt n keer gespeeld. Zij A_i de afstand in cm tot de roos bij spel $i \in \{1, \dots, n\}$, en $\bar{A}_n := \sum_{i=1}^n A_i/n$. De speler wordt beloond met $(\bar{A}_n - 5)^2/50$ euro. Formuleer een limietstelling voor de beloning en geef de asymptotische variantie als $n \rightarrow \infty$.
2. De stochast X is t -verdeeld met $\nu \geq 3$ vrijheidsgraden, i.e. X heeft kansdichtheid

$$f_\nu(x) = \frac{(1 + x^2/\nu)^{-(\nu+1)/2}}{\nu^{1/2} B(\nu/2, 1/2)}, \quad x \in \mathbb{R},$$

waar $B(p, q) = \Gamma(p)\Gamma(q)/\Gamma(p+q)$ voor $p, q > 0$.

a Laat zien dat

$$B(\nu/2, 1/2) \mathbb{E}[1 + X^2/\nu] = B((\nu - 2)/2, 1/2) \int_{-\infty}^{\infty} f_{\nu-2}(y) dy.$$

b Gebruik **a** om de variantie van X te bepalen.

c Zij X_1, \dots, X_n een steekproef uit een normale verdeling met verwachting μ en variantie σ^2 , \bar{X} het steekproefgemiddelde en S^2 de steekproefvariantie. Wat is de verdeling van de stochasten $n^{1/2}(\bar{X} - \mu)/\sqrt{S^2}$ en $n(\bar{X} - \mu)^2/S^2$?

3. Zij (X_1, X_2) een discreet verdeelde stochastische vector met kansdichtheid

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} c_n x_1, & x_2 \leq x_1; \\ 0, & \text{elders,} \end{cases}$$

voor $x_1, x_2 \in \{1, \dots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$, en $c_n = 6/[n(n+1)(2n+1)] = 1/(\sum_{k=1}^n k^2)$.

a Zijn X_1 en X_2 onafhankelijk? Motiveer uw antwoord.

b Bepaal de verdeling van $\min(X_1, X_2)$ en $\max(X_1, X_2)$.

c Wat is de voorwaardelijke kansdichtheid van X_2 gegeven $X_1 = k$ voor $k \in \{1, \dots, n\}$? Wat zijn de voorwaardelijke verwachting en variantie van X_2 gegeven $X_1 = k$?

d Bewijs dat $\sum_{k=1}^n k^3 = (\sum_{k=1}^n k)^2$ en bepaal de verwachting van X_1 en X_2 .

4. Geef een gemotiveerd antwoord op de volgende vragen.

a Zij U uniform verdeeld op $(0, \pi)$. Bepaal verdelingsfunctie en kansdichtheid van $\sin(U)$.

b Als zes studenten, drie meisjes en drie jongens, in de kantine willekeurig aan een ronde tafel plaatsnemen, wat is dan de kans dat elke jongen twee buurvrouwen heeft?

c Een vader trakteert zijn vier kinderen op een glas limonade. De ober schenkt X_i ml limonade in glas $i = 1, \dots, 4$. Als de X_i onderling onafhankelijk en $\mathcal{N}(200, 400)$ verdeeld zijn, wat is dan de kans dat $\sum_{i=1}^4 X_i$ niet meer dan 800 ml is?

d Zij X_1 en X_2 onafhankelijk en geometrisch verdeeld met succesparameter $p \in (0, 1)$. Wat is de voorwaardelijke verdeling van X_1 gegeven $X_1 + X_2 = n$ voor $n \in \{2, 3, \dots\}$?

Succes!

ANTWOORDEN

1. **a** Een uitkomstenruimte is $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 25^2\}$. We kiezen een uniforme kansverdeling.
- b** $\mathbb{P}(E) = \frac{\pi 5^2}{\pi 25^2} = \frac{1}{25}$. Het aantal keren dat E optreedt is binomiaal verdeeld met parameters 1000 en $1/25$. Een normale benadering met continuïteitscorrectie geeft $1 - \Phi((49.5 - 40)/\sqrt{38.4}) = 1 - \Phi(1.533056) \approx 0.06$.
- c** Redenerend als in [b] vindt men dat A^2 homogeen is verdeeld op $[0, 25^2]$. Een dichtheid voor A is dus $2x/625$ voor $x \in [0, 25]$. Merk op dat

$$\mathbb{E}A = \int_0^{25} \frac{2x^2}{625} dx = \frac{50}{3}$$

en, omdat $\mathbb{E}A^2 = 25^2/2$ is $\text{Var } A = 625/18$.

- d** Volgens de centrale limietstelling convergeert $\sqrt{n}(\bar{A}_n - \mathbb{E}A_1)/\sigma(A_1)$ in verdeling naar een standaard normale verdeling. De functie $g(\mu) := (\mu - 5)^2/50$ is differentieerbaar met afgeleide $(\mu - 5)/25 \neq 0$ voor $\mu = \mathbb{E}A_1$. Dus is $g(\bar{A}_n)$ asymptotisch normaal verdeeld met verwachting $g(\mathbb{E}A_1) = 49/18$ en variantie $\text{Var}(A_1) (\mathbb{E}A_1 - 5)^2/(5^4 n) = (35/9)^2/(2n)$.

2. **a** De verwachting is

$$\mathbb{E}[1 + X^2/\nu] = \int_{-\infty}^{\infty} (1 + x^2/\nu) f_\nu(x) dx = \frac{B((\nu - 2)/2, 1/2)}{B(\nu/2, 1/2)} \int_{-\infty}^{\infty} f_{\nu-2}(y) dy$$

met de substitutie $y = x\sqrt{(\nu - 2)/\nu}$.

- b** X is symmetrisch om 0, dus $\mathbb{E}X = 0$ en

$$\text{Var } X = \mathbb{E}[X^2] = \nu \mathbb{E}[1 + X^2/\nu] - \nu = \nu \left[\frac{B((\nu - 2)/2, 1/2)}{B(\nu/2, 1/2)} - 1 \right] = \frac{\nu}{\nu - 2}.$$

- c** De stochast $n^{1/2}(\bar{X} - \mu)/S$ is t -verdeeld met $n - 1$ vrijheidsgraden. Bovendien weten we dat $n(\bar{X} - \mu)^2/\sigma^2 \sim \chi^2(1)$ en $(n - 1)S^2/\sigma^2 \sim \chi^2(n - 1)$ met \bar{X} en S^2 onafhankelijk. Dus $n(\bar{X} - \mu)^2/S^2$ is $F(1, n - 1)$ verdeeld.

3. **a** Voor $n = 1$ zijn X_1 en X_2 onafhankelijk omdat $\mathbb{P}(X_1 = 1; X_2 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = 1)\mathbb{P}(X_2 = 1) = 1$. Voor $n > 1$ zijn X_1 en X_2 afhankelijk. Immers, $f(1, 2) = 0$ maar zowel $\mathbb{P}(X_1 = 1) \geq f(1, 1) > 0$ als $\mathbb{P}(X_2 = 2) \geq f(2, 2) > 0$.

- b** Voor $k \in \{1, \dots, n\}$ is

$$\mathbb{P}(\min(X_1, X_2) = k) = \mathbb{P}(X_1 \geq k; X_2 = k) = c_n \sum_{l=k}^n l = \frac{c_n}{2} \{n(n+1) - k(k-1)\};$$

$$\mathbb{P}(\max(X_1, X_2) = k) = \mathbb{P}(X_1 = k; X_2 \leq k) = c_n \sum_{l=1}^k k = c_n k^2.$$

Merk op dat $X_1 = \max(X_1, X_2)$ en $X_2 = \min(X_1, X_2)$.

- c** $\mathbb{P}(X_2 = l | X_1 = k) = f(k, l)/\mathbb{P}(X_1 = k) = c_n k / (c_n k^2) = 1/k$, een discreet uniforme verdeling op $\{1, \dots, k\}$. De voorwaardelijke verwachting is dus $(k + 1)/2$ en de voorwaardelijke variantie $(k^2 - 1)/12$.

d Bewijs met inductie. De basisstap $n = 1$ is duidelijk. Voor de stap van n naar $n + 1$ merken we op dat

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k=1}^{n+1} k\right)^2 &= \left(\sum_{k=1}^n k + n + 1\right)^2 = \left(\sum_{k=1}^n k\right)^2 + (n + 1)^2 + 2(n + 1) \sum_{k=1}^n k \\ &\stackrel{!}{=} \sum_{k=1}^n k^3 + (n + 1)^2 + n(n + 1)^2 = \sum_{k=1}^{n+1} k^3. \end{aligned}$$

Dus $\mathbb{E}X_1 = c_n \sum_{k=1}^n k^3 = c_n (\sum_{k=1}^n k)^2 = 3n(n + 1)/[2(2n + 1)]$. Met gebruik van **c** volgt $\mathbb{E}X_2 = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X_2|X_1]] = \mathbb{E}[X_1 + 1]/2 = (3n^2 + 7n + 2)/[4(2n + 1)]$.

4. **a** De waardenverzameling van $\sin(U)$ is $(0, 1]$. Voor $x \in (0, 1]$ is $\mathbb{P}(\sin(U) \leq x) = \mathbb{P}(U \leq \arcsin(x)) + \mathbb{P}(U \geq \pi - \arcsin(x)) = 2 \arcsin(x)/\pi$, de verdelingsfunctie. Een dichtheid vindt men door differentiëren: $2(1 - x^2)^{-1/2}/\pi$.

b De kans is $6 \times 2 \times 3 \times 2/6! = 1/10$.

c Omdat $\sum_{i=1}^4 X_i \sim \mathcal{N}(800, 1600)$, is de gevraagde kans $\Phi(0) = 1/2$ (symmetrie!).

d De som $X_1 + X_2$ is negatief binomiaal($2, p$) verdeeld, dus

$$\mathbb{P}(X_1 = x | X_1 + X_2 = n) = \frac{\mathbb{P}(X_1 = x; X_2 = n - x)}{\mathbb{P}(X_1 + X_2 = n)} = \frac{p(1 - p)^{x-1} p(1 - p)^{n-x-1}}{(n - 1)p^2(1 - p)^{n-2}} = \frac{1}{n - 1}$$

voor $x \in \{1, \dots, n - 1\}$, een discreet uniforme verdeling.