Technische Universiteit Eindhoven
Faculteit Wiskunde en Informatica

Tentamen **Kansrekening en Statistiek (2WS04)**,
vrijdag 28 augustus 2009, van 9.00–12.00 uur.

Dit is een tentamen met gesloten boek. De uitwerkingen van de opgaven dienen duidelijk en overzichtelijk te worden opgeschreven. Elk onderdeel levert 10 punten op. Het cijfer is het totaal van de behaalde punten gedeeld door 14, afgerond op een geheel getal.

Op elk ingeleverd vel de naam van de student, de code van het college en de datum van het tentamen noteren.

U mag gebruik maken van een onbeschreven Statistisch Compendium en een (grafische) rekenmachine.

---

1. Een voetbalclub te Eindhoven heeft twintig leden. Twee van de leden spelen het liefst als doelman, tien als aanvaller en acht als verdediger.

   a Op hoeveel manieren kan de trainer een elftal opstellen met vijf verdedigers, vijf aanvallers en een doelman zodanig dat elk van de opgestelde spelers in zijn favoriete rol speelt?

   b Op een wedstrijddag zijn beide doelmannen door de griep geveld en kunnen niet spelen. Hoeveel opstellingen zijn er nu mogelijk met een doelman, vijf aanvallers en vijf verdedigers zodanig dat op de doelman na elk van de opgestelde spelers in zijn favoriete rol speelt?

   Elke maand speelt de Eindhovense club tegen een rivaal uit Maastricht die even sterk is. Een eventueel gelijkspel wordt door middel van strafschoppen beslist.

   c Wat is de (exacte) kans dat over een jaar genomen Eindhoven de meeste wedstrijden wint?

   d Formuleer een limietstelling omtrent het percentage der door Eindhoven gewonnen wedstrijden over een lange reeks van jaren. Motiveer uw antwoord.

   e Geef een goede benadering van de kans dat (bij ongewijzigde relatieve sterkte van de clubs) van de 120 in het komende decennium te spelen wedstrijden Eindhoven er precies 70 wint.

2. Zij (X, Y) een stochastische vector met simultane verdelingsfunctie

   $$\frac{1}{3}\,\Phi(y+1)\,1\{x \geq -1\} + \frac{2}{3}\,\Phi(y-1)\,1\{x \geq 1\},$$

   $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, waar $\Phi(\cdot)$ de verdelingsfunctie van de standaard normale verdeling is en $1\{\cdot\}$ de indicatorfunctie.

   a Bepaal marginale kansdichtheden van X en Y.

   b Zijn X en Y onafhankelijk? Motiveer uw antwoord.

   c Geef een voorwaardelijke kansdichtheid van Y gegeven X.

   d Bepaal $\operatorname{Var}(Y \mid X)$ en $\operatorname{Var} Y$.

   e Bepaal $\operatorname{Cov}(X, Y)$. Interpreteer uw antwoord.

3. Geef een gemotiveerd antwoord op de volgende vragen.

   a De stochast X is exponentieel verdeeld met parameter 1. Bepaal de verwachting van $X + \frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{3}X^3$.

   b Zij Y negatief binomiaal verdeeld met succesparameter $p = 1/10$ en drager $5, 6, \ldots$. Geef met behulp van de ongelijkheid van Markov een ondergrens voor de kans dat Y de waarde 5 aanneemt. Vergelijk de grens met de exacte waarde van deze kans.

   c Een stochast Z heeft momentgenererende functie $M_Z(t) = \exp\big[3(e^t - 1)\big]$ voor $t \in \mathbb{R}$. Bepaal het derde moment en de kans $\mathbb{P}(Z = 1)$.

   d De stochastische vector (X_1, X_2) heeft simultane kansdichtheid $f(x, y) \equiv 1$ voor $(x, y) \in (0, 1)^2$ en $f(x, y) \equiv 0$ elders. Geef een kansdichtheid van $X_1 + X_2$.

Succes!

Antwoorden

1. **a** Op $2 \times \binom{10}{5} \times \binom{8}{5} = 2 \times 252 \times 56 = 28.224$ manieren.

   b Op $8 \times \binom{10}{5} \times \binom{8}{5} = 112.896$ manieren.

   c Zij X het aantal door Eindhoven gewonnen wedstrijden. Dan is X binomiaal verdeeld met parameters $n = 12$ en $p = 1/2$. De gevraagde kans is

$$\mathbb{P}(X \geq 7) = \frac{1}{2}\,(1 - \mathbb{P}(X = 6)) = \frac{1}{2}\left(1 - \binom{12}{6} 2^{-12}\right) \approx 0,387$$

   vanwege symmetrie.

   d Op grond van de sterke wet der grote aantallen convergeert de fractie gewonnen wedstrijden bijna zeker naar 1/2, de kans op winst voor één wedstrijd.

   e Gebruik een normale benadering met continuïteitscorrectie. Zij Y het aantal door Eindhoven gewonnen wedstrijden. Dan is

$$\mathbb{P}(Y = 70) = \mathbb{P}(69,5 < Y \leq 70,5) = \mathbb{P}(\frac{69,5 - 60}{\sqrt{30}} < Y \leq \frac{70,5 - 60}{\sqrt{30}})$$

$$\approx \Phi(\frac{70,5 - 60}{\sqrt{30}}) - \Phi(\frac{69,5 - 60}{\sqrt{30}}) \approx 0,0138.$$

2. **a** Merk op dat de simultane verdelingsfunctie discontinu is wanneer $x = -1$ of $x = 1$. Verder is

$$\mathbb{P}(X = -1) = \lim_{c \uparrow \infty} \mathbb{P}(X \leq -1; Y \leq c) = 1/3.$$

   Evenzo is $\mathbb{P}(X = 1) = 2/3$, en $\mathbb{P}(X = c) = 0$ voor $c \neq -1, 1$. Voor Y merken we op dat voor $y \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{P}(Y \leq y) = \lim_{c \uparrow \infty} \mathbb{P}(X \leq c; Y \leq y) = \Phi(y+1)/3 + 2\Phi(y-1)/3.$$

   Een kansdichtheid f_Y verkrijgen we door te differentiëren naar y: $f_Y(y) = \phi(y+1)/3 + 2\phi(y-1)/3$ waar $\phi(z) = (2\pi)^{-1/2} e^{-z^2/2}$ dichtheid van een standaard normale verdeling is.

   b De simultane verdelingsfunctie is niet gelijk aan het product van de marginale verdelingsfuncties (e.g. $x = 0$, $y = 1$). Dus zijn X en Y afhankelijk.

   c Omdat

$$\mathbb{P}(Y \leq y \mid X = -1) = \frac{\mathbb{P}(Y \leq y; X \leq -1)}{\mathbb{P}(X = -1)} = \Phi(y+1)$$

   is Y gegeven $X = -1$ normaal verdeeld met verwachting -1 en variantie 1. Op analoge wijze vindt men dat gegeven $X = 1$, Y normaal verdeeld is met verwachting en variantie gelijk aan 1.

   d Op grond van [c] vinden we $\mathbb{E}(Y \mid X) = X$ en $\mathrm{Var}(Y \mid X) = 1$. Dus is

$$\mathrm{Var}\, Y = \mathbb{E}\,\mathrm{Var}(Y \mid X) + \mathrm{Var}(\mathbb{E}(Y \mid X)) = 1 + \mathrm{Var}\, X = 1 + 1 - (\mathbb{E}X)^2 = 2 - 1/9 = 17/9.$$

e We weten dat $\mathbb{E}X = \mathbb{E}Y = 1/3$. Bovendien is $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}(XY|X)\right] = \mathbb{E}\left[X\mathbb{E}(Y \mid X)\right] = \mathbb{E}(X^2) = 1$. Dus is $\operatorname{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - (\mathbb{E}X)(\mathbb{E}Y) = 1 - 1/9 = 8/9$. We hebben te maken met een mengsel van normale verdelingen met stijgende verwachting. Vandaar de positieve correlatie.

3. **a** De eerste drie momenten van een exponentiële verdeling zijn $1, 2$ en 6. Dus is $\mathbb{E}(X + \frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{3}X^3) = 4$.

b Volgens de ongelijkheid van Markov is

$$\mathbb{P}(Y \geq 6) \leq \frac{\mathbb{E}Y}{6} = \frac{50}{6},$$

groter dan de triviale grens 1. Overgaan op het complement geeft $\mathbb{P}(Y = 5) \geq 0$. De exacte waarde is $p^5 = 10^{-5}$.

c Z is Poisson verdeeld met parameter 3, en dus is $\mathbb{E}Z = 3$. Verder is $\mathbb{P}(Z = 1) = 3e^{-3}$, en $\mathbb{E}(Z^2) = \operatorname{Var} Z + \mathbb{E}(Z^2) = 3 + 9 = 12$. We krijgen het derde moment door de momentgenererende functie drie maal te differentiëren en te evalueren in $t = 0$. Aangezien de derde afgeleide gelijk is aan $3e^t\left[M_Z(t) + 2M_Z'(t) + M_Z''(t)\right]$ is $\mathbb{E}(Z^3) = 57$.

d Merk op dat X_1 en X_2 onafhankelijk en standaard uniform verdeeld zijn. Gebruik de convolutieformule. Voor $a \in (0,2)$ is

$$f_{X_1+X_2}(a) = \int_0^1 f_{X_1}(a-y)\,dy.$$

Voor $a \in (0,1)$ krijgen we

$$f_{X_1+X_2} = \int_0^a dy = a,$$

voor $a \in (1,2)$,

$$f_{X_1+X_2} = \int_{a-1}^1 dy = 2 - a.$$