Technische Universiteit Eindhoven
Faculteit Wiskunde en Informatica

Tentamen **Kansrekening en Statistiek (2WS04)**,
vrijdag 13 augustus 2010, van 9.00–12.00 uur.

Dit is een tentamen met gesloten boek. De uitwerkingen van de opgaven dienen duidelijk en overzichtelijk te worden opgeschreven. Elk onderdeel levert 10 punten op. Het cijfer is het totaal van de behaalde punten gedeeld door 13, afgerond op een geheel getal.

Op elk ingeleverd vel de naam van de student, de code van het college en de datum van het tentamen noteren.

U mag gebruik maken van een onbeschreven Statistisch Compendium en een (grafische) rekenmachine.

---

1. Zij X homogeen verdeeld op het interval $(0, 1)$ en definieer de stochastische variabele U als volgt: $U := \max\{X, 1 - X\}$. Zij $V = 1 - U$.

   a Laat zien dat U homogeen verdeeld is.

   b Bepaal de simultane verdelingsfunctie van de stochastische vector (U, V).

   c Zijn U en V onafhankelijk? Motiveer uw antwoord.

   d Bereken $\mathrm{Var}(U)$, $\mathrm{Var}(V)$ en $\mathrm{Cov}(U, V)$. Interpreteer uw antwoord.

2. Een jongetje heeft twintig zakjes met elk een rode, zeven witte en zeven zwarte knikkers. Hij trekt willekeurig uit elk zakje drie knikkers zonder teruglegging.

   a Wat is de kans dat de trekking uit het eerste zakje één rode en twee witte knikkers oplevert? Motiveer uw antwoord.

   b Wat is de kans dat precies één van de twintig trekkingen uit een zakje knikkers een greep met één rode en twee witte knikkers oplevert?

   c Geef met behulp van de ongelijkheid van Bonferroni een ondergrens voor de kans dat de jongen uit geen enkel zakje een greep met één rode en twee witte knikkers krijgt. Vergelijk uw antwoord met de exacte waarde.

   d Geef een goede benadering van de kans dat tenminste tien trekkingen een greep met één rode en twee witte knikkers opleveren.

Zie ommezijde

3. Geef een gemotiveerd antwoord op de volgende vragen.

a De stochast X is uniform verdeeld op het interval $(0, 1)$. Bepaal een kansdichtheid van $\arccos(X)$.

b Beschouw de functie

$$F(x) = 1 - \frac{c}{1+x}$$

voor $x \geq 0$ en 0 elders. Voor welke c is F een verdelingsfunctie? Bepaal de mediaan van de door F gedefinieerde verdeling(en).

c Een stochast Y heeft momentgenererende functie

$$M_Y(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}e^t + \frac{1}{4}e^{2t}$$

voor $t \in \mathbb{R}$. Bereken de eerste drie momenten van Y.

d De stochast Z_n, $n \in \mathbb{N}$, heeft een Poissonverdeling met parameter n. Zijn er constanten a_n, b_n zodat $a_n Z_n + b_n$ convergeert naar een standaard normale verdeling? Zo ja, bepaal de constanten; zo nee, waarom niet?

e Een hand bevat dertien willekeurig getrokken kaarten uit een goed geschud spel. Zij A de eventualiteit dat de hand uitsluitend rode (harten of ruiten) kaarten bevat. Definieer de stochastische variabele X als het aantal azen in de hand. Wat is de voorwaardelijke kansverdeling van X gegeven dat A optreedt? Vergelijk uw antwoord met de onvoorwaardelijke kansverdeling van X.

Succes!

Antwoorden

1. **a** Merk op dat de waardenverzameling van U het interval $(\frac{1}{2}, 1)$ is. Voor u in dit interval is

$$F_U(u) = \mathbb{P}(X \le u; 1 - X \le u) = \mathbb{P}(1 - u \le X \le u) = 2u - 1.$$

Differentiëren geeft kansdichtheid 2 op $(\frac{1}{2}, 1)$ zodat U homogeen verdeeld is. NB: Op analoge wijze volgt dat V homogeen verdeeld is op het interval $(0, \frac{1}{2})$.

b Voor $u \in (\frac{1}{2}, 1)$ en $v \in (0, \frac{1}{2})$ is

$$F(u, v) = \mathbb{P}(U \le u; V \le v) = \mathbb{P}(U \le u; U \ge 1 - v) = F_U(u) - F_U(1 - v).$$

Met behulp van [**a**] vindt men

$$F(u, v) = 2u - 1 - 2(1 - v) + 1 = 2(u + v - 1)$$

mits $u + v > 1$.

c U en V zijn afhankelijk. Immers, voor $u \in (\frac{1}{2}, 1)$, $v \in (0, \frac{1}{2})$ en $u + v < 1$ is $F(u, v) = 0 \neq F_U(u)\, F_V(v)$.

d $\mathrm{Var}(U) = \frac{1}{12}\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{48} = \mathrm{Var}(V)$. Verder is $\mathrm{Cov}(U, V) = -\mathrm{Var}(U) = -\frac{1}{48}$. Merk op dat U de lengte van het grootste deelinterval is, V de lengte van het overgebleven stuk. Als U groot is, is V klein. De stochasten zijn dus negatief gecorreleerd.

2. Zij A_i de eventualiteit dat de i-de trekking een rode en twee witte knikkers oplevert.

a De gevraagde kans is

$$\mathbb{P}(A_1) = \frac{\binom{7}{2}}{\binom{15}{3}} = \frac{6}{455} \approx 0,046.$$

b Zij $X = \sum_{i=1}^{20} 1_{A_i}$. Dan is X binomiaal verdeeld met parameters $n = 20$ en succeskans $p = \mathbb{P}(A_1)$. De gevraagde kans is $20\,p\,(1 - p)^{19} \approx 0,38$.

c Op grond van Bonferroni is

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{20} A_i^c\right) \ge 1 - \sum_{i=1}^{20} \mathbb{P}(A_i) = 1 - 20\,\mathbb{P}(A_1) \approx 0,078.$$

De exacte kans is $(1 - \mathbb{P}(A_1))^{20} \approx 0,39$.

d Gebruik een normale benadering met continuïteitscorrectie en definieer X als in [**b**]. Dan is

$$\mathbb{P}(X \ge 10) = \mathbb{P}(X \ge 9,5) = \mathbb{P}\left(\frac{X - 20\mathbb{P}(A_1)}{\sqrt{20\mathbb{P}(A_1)\,(1 - \mathbb{P}(A_1))}} \ge \frac{9,5 - 20\mathbb{P}(A_1)}{\sqrt{20\mathbb{P}(A_1)\,(1 - \mathbb{P}(A_1))}}\right)$$

$$\approx 1 - \Phi\left(\frac{9,5 - 20\mathbb{P}(A_1)}{\sqrt{20\mathbb{P}(A_1)\,(1 - \mathbb{P}(A_1))}}\right) = 1 - \Phi(19,4) \approx 0.$$

3. **a** De waardenverzameling van $\arccos(X)$ is $(0, \pi/2)$. Voor y in dit interval is

$$\mathbb{P}(\arccos(X) \leq y) = \mathbb{P}(X \geq \cos(y)) = 1 - \cos(y).$$

Een kansdichtheid verkrijgt men door te differentiëren: $f(y) = \sin y$.

b Een functie F is een verdelingsfunctie desda hij stijgend en rechtscontinu is en $F(-\infty) = 0$, $F(\infty) = 1$. De limieten zijn voor elke c in orde, de rechtscontinuïteit ook. Voor $x > 0$ moet $F(x) \geq F(0^-) = 0$, dus $c \leq 1$. Ook moet $F(x) \leq F(\infty) = 1$, dus $c \geq 0$. Voor elke $c \in [0, 1]$ is F stijgend. Merk op dat voor $c = 1$ de bijbehorende stochast (zeg X) geen atomen heeft, dat voor $c = 0$ $P(X = 0) = 1$ en voor $c \in (0, 1)$ er een atoom ter grootte $1 - c$ in 0 is.

Wat betreft de mediaan moeten we oplossen $F(x) = 1/2$ dus $x = 2c - 1$ als de kansmassa $1-c$ van het atoom de waarde $1/2$ niet overschrijdt, dus als $c \in [1/2, 1]$. In andere gevallen is de mediaan 0, immers $\mathbb{P}(X \leq 0) = 1 - c \geq 1/2$ en $\mathbb{P}(X \geq 0) = 1 \geq 1/2$.

c Uit M_Y kan men aflezen dat Y discreet verdeeld is met waardenverzameling $\{0, 1, 2\}$ en kansdichtheid $f_Y(0) = 1/2$, $f_Y(1) = f_Y(2) = 1/4$. Dus $\mathbb{E}Y = (1 + 2)/4 = 3/4$, $\mathbb{E}Y^2 = (1 + 4)/4 = 5/4$ en $\mathbb{E}Y^3 = (1 + 8)/4 = 9/4$.

d Merk op dat Z_n in verdeling gelijk is aan de som van n onafhankelijke en gelijkverdeelde stochasten met een Poisson(1) verdeling. Definieer $W_n = n^{-1/2}Z_n - \sqrt{n}$ en gebruik de centrale limietstelling.

e Allereerst rekenen we de kans op A uit: er zijn $\binom{26}{13}$ 'rode' handen en $\binom{52}{13}$ handen in totaal zodat $\mathbb{P}(A) = (26!\,39!)/(13!\,52!) \approx 1,64 \times 10^{-5}$. Gegeven A kan de hand nul, één of twee azen bevatten. Voor $x \in \{0, 1, 2\}$ is

$$\mathbb{P}(X = x|A) = \frac{\mathbb{P}(\{X = x\} \cap A)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\binom{2}{x}\binom{24}{13-x}}{\binom{26}{13}},$$

een hypergeometrische kansdichtheid met parameters $n = 13$, $N = 26$, $M = 2$. Invullen geeft $\mathbb{P}(X = 0|A) = \mathbb{P}(X = 2|A) = 6/25$ en $\mathbb{P}(X = 1|A) = 13/25$. Onvoorwaardelijk is X hypergeometrisch verdeeld met parameters $n = 13$, $N = 52$ en $M = 4$. Ergo

$$\mathbb{P}(X = x) = \frac{\binom{4}{x}\binom{48}{13-x}}{\binom{52}{13}}, x \in \{0, 1, \ldots, 4\}.$$

Invullen geeft $\mathbb{P}(X = 0) \approx 0,3038$, $\mathbb{P}(X = 1) \approx 0,4388$, $\mathbb{P}(X = 2) \approx 0,2135$, $\mathbb{P}(X = 3) \approx 0,0412$ en $\mathbb{P}(X = 4) \approx 0,0026$.