Technische Universiteit Eindhoven
Faculteit Wiskunde en Informatica

Tentamen **Kansrekening en Statistiek (2WS04)**,
dinsdag 17 juni 2008, van 9.00–12.00 uur.

Dit is een tentamen met gesloten boek. De uitwerkingen van de opgaven dienen duidelijk en overzichtelijk te worden opgeschreven. Elk onderdeel levert 10 punten op. Het cijfer is het totaal van de behaalde punten gedeeld door 14, afgerond op een geheel getal.

Op elk ingeleverd vel de naam van de student, de code van het college en de datum van het tentamen noteren.

U mag gebruik maken van een onbeschreven Statistisch Compendium en een (grafische) rekenmachine.

---

1. Nico, Sanne, Wilma en Ed spelen kaart. Ieder krijgt, na eerlijk en goed schudden, een hand van dertien kaarten.

   a Zij X het aantal schoppen dat Nico krijgt. Wat is de kansverdeling van X (motiveer je antwoord)?

   b Nico en Sanne hebben samen negen schoppen. Bereken de voorwaardelijke kans dat Wilma en Ed ieder twee schoppen hebben.

   c Bereken de kans dat de schoppen 'rond' zitten, i.e. dat elke speler tenminste drie schoppen krijgt.

2. Zij (X_1, X_2) een absoluut continu verdeelde stochastische vector met kansdichtheid

   $$f(x_1, x_2) = c\, x_2 \exp\left[-x_1\, x_2\right]$$

   voor $x_1 > 0$, $x_2 \in (0, 1)$, en zekere constante c.

   a Bereken c.

   b Bepaal de marginale verdelingen van X_1 en X_2.

   c Wat is de voorwaardelijke kansdichtheid van X_1 gegeven $X_2 = x_2$ voor $x_2 \in (0, 1)$? Zijn X_1 en X_2 onafhankelijk (motiveer je antwoord)?

   d Bepaal de verwachting en variantie van X_1 en X_2, voorzover deze eindig zijn.

3. Geef een gemotiveerd antwoord op de volgende vragen.

   a Zij U uniform verdeeld op $(0, 1)$ en $p \in (0, 1)$ een constante. Wat is de verdeling van

   $$1 + \lfloor \frac{\ln U}{\ln(1 - p)} \rfloor,$$

   waarbij voor $x > 0$, $\lfloor x \rfloor = \sup\{n \in \mathbb{N}_0 : n \leq x\}$ naar beneden op gehele getallen afrondt?

b Hoe vaak moet men een eerlijke munt werpen opdat de kans op tenminste eenmaal 'kop' tenminste $0,95$ is?

c Beschouw twee onafhankelijke stochasten X en Y, ieder exponentieel verdeeld met parameter 1. Bepaal de verdeling van $V := X - Y$ en $S := X + Y$. Bereken $\mathrm{Cov}(V, S)$.

d Wat is de mediaan van een binomiale verdeling met $n = 3$ en $p = 1/3$?

4. Een experiment bestaat uit het gelijktijdig werpen van een eerlijke munt en dobbelsteen.

a Beschrijf de uitkomstenruimte van dit experiment en geef een geschikte kansverdeling.

b Zij E de gebeurtenis dat het experiment een 'kop' en 'zes' oplevert. Geef een goede benadering van de kans dat als het experiment 300 keer wordt herhaald, E tenminste 20 keer optreedt.

c Onderstel dat men niet geheel zeker is van de eerlijkheid van munt en dobbelsteen en op basis van de bij b) beschreven experimenten $\mathbb{P}(E)$ wil schatten. Stel hiertoe een geschikte statistiek voor. Bepaal zijn asymptotische variantie door een limietstelling te formuleren. Hoe kan men deze variantie schatten? (Motiveer uw antwoorden).

Succes!

Antwoorden

1. **a** X is hypergeometrisch verdeeld. Immers, omdat we trekken zonder teruglegging is voor $x \in \{0, 1, \ldots, 13\}$

$$\mathbb{P}(X = x) = \frac{\binom{13}{x}\binom{39}{13-x}}{\binom{52}{13}}.$$

b Op de gegeven eventualiteit zijn er voor Wilma en Ed samen nog vier schoppen over, en 22 niet-schoppen. Wilma kan op $\binom{4}{2}\binom{26-4}{11}$ manieren twee schoppen in handen krijgen en elf kaarten van een andere kleur. Het totaal aantal manieren om Wilma haar kaarten te geven is $\binom{26}{13}$. Ed krijgt wat overblijft. De gevraagde kans is dus

$$\frac{\binom{4}{2}\binom{22}{11}}{\binom{26}{13}} = \frac{6 \times 22! \times (13!)2}{(11!)^2 \times 26!} = \frac{6 \times (13 \times 12)^2}{26 \times 25 \times 24 \times 23} = \frac{2 \times 3^2 \times 13}{5^2 \times 23} = \frac{234}{575},$$

ongeveer 41 procent.

c De kans dat Nico vier schoppen krijgt en de andere spelers ieder drie schoppen is

$$p = \frac{\binom{13}{4}\binom{39}{9}\binom{9}{3}\binom{30}{10}\binom{6}{3}\binom{20}{10}}{\binom{52}{13}\binom{39}{13}\binom{26}{13}} = \frac{\binom{13}{3}^3\binom{13}{4}}{\binom{52}{13}} = \frac{39! \times (13!)^5}{52! \times (10!)^3 \times 9! \times 4! \times (3!)^3}.$$

Er zijn vier spelers, dus de gevraagde kans is $4p$, ongeveer 11 procent.

2. **a** Merk op dat $f(x_1, x_2)/c$ als functie van x_1 een dichtheid is van een exponentiële verdeling met intensiteitsparameter x_2, zodat

$$\int_0^\infty \int_0^1 x_2\, e^{-x_1 x_2}\, dx_1\, dx_2 = \int_0^1 dx_2 = 1.$$

Hieruit volgt $c = 1$.

b De berekening bij de vorige vraag laat zien dat X_2 standaard homogeen verdeeld is. De marginale verdeling van X_1 verkrijgt men door te integreren over x_2. Door gebruik te maken van partiële integratie ziet men dat

$$f(x_1) = \int_0^1 x_2\, e^{-x_1 x_2} dx_2 = \left[\frac{-e^{-x_1 x_2}}{x_1^2}(x_1\, x_2 + 1)\right]_{x_2=0}^1 = \frac{1 - x_1\, e^{-x_1} - e^{-x_1}}{x_1^2}.$$

Merk op: $f(x_1)$ lijkt niet te bestaan bij $x_1 = 0$ maar een simpel Taylorargument laat zien dat dit schijn is: $f(0) = 1/2$.

c Een voorwaardelijke kansdichtheid is

$$f(x_1 \mid X_2 = x_2) = \frac{f(x_1, x_2)}{f_{X_2}(x_2)} = x_2\, e^{-x_1 x_2},$$

een exponentiële verdeling met parameter x_2. Vanwege de afhankelijkheid van x_2 zijn X_1 en X_2 niet onafhankelijk.

d Omdat X_2 homogeen verdeeld is, is $\mathbb{E}X_2 = 1/2$ en $\mathrm{Var}(X_2) = 1/12$. Voor X_1 vindt men $\mathbb{E}X_1 = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}(X_1|X_2)\right] = \mathbb{E}X_2^{-1} = \infty$. Een eindig tweede moment impliceert een eindig eerste moment, dus de variantie van X_1 bestaat niet.

3. **a** De waardenverzameling is $\mathbb{N}$. Voor $k \in \mathbb{N}$ is

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(1 + \lfloor \frac{\ln U}{\ln(1-p)} \rfloor = k) &= \mathbb{P}(\frac{\ln U}{\ln(1-p)} \in [k-1, k)) = \mathbb{P}(-\ln U \in -\ln(1-p)[k-1,k)) \\ &= \mathbb{P}(U \in ((1-p)^k, (1-p)^{k-1}]) = (1-p)^{k-1} - (1-p)^k \\ &= p\,(1-p)^{k-1}, \end{aligned}$$

een geometrische verdeling.

b De kans op geen enkele keer 'kop' in n worpen is 2^{-n}. We willen

$$1 - 2^{-n} = 0,95 \Leftrightarrow n = -\ln(0,05)/\ln(2) \approx 4,3$$

en moeten derhalve vijf keer gooien.

c De som is Erlang verdeeld. Immers, voor $s > 0$ geeft de convolutieformule

$$f_S(s) = \int_0^s e^{-x}\, e^{-(s-x)}\, dx = \int_0^s e^{-s}\, dx = s\, e^{-s}.$$

Voor het verschil rekenen we eerst de verdeling van $-Y$ uit alvorens de convolutieformule toe te passen.

$$\mathbb{P}(-Y \leq y) = \mathbb{P}(Y \geq -y) = e^y,$$

zodat $-Y$ kansdichteid e^y heeft voor $y < 0$. We maken onderscheid tussen $v > 0$ en $v < 0$. Voor positieve v is

$$f_V(v) = \int_v^\infty e^{-x}\, e^{v-x}\, dx = e^v \int_v^\infty e^{-2x}\, dx = e^v\, \frac{1}{2} e^{-2v} = \frac{1}{2} e^{-v}.$$

Voor $v < 0$,

$$f_V(v) = \int_0^\infty e^{-x}\, e^{v-x}\, dx = e^v \int_0^\infty e^{-2x}\, dx = \frac{1}{2} e^v.$$

Samengevat is $f_V(v) = e^{-|v|}/2$ voor $v \in \mathbb{R}$, een Laplaceverdeling. Tenslotte is $\mathrm{Cov}(S, V) = \mathrm{Var}(X) - \mathrm{Var}(Y) = 0$.

d De kansdichtheid is

$$f(0) = 8/27;\ f(1) = 12/27;\ f(2) = 6/27;\ f(3) = 1/27.$$

Omdat $f(0) + f(1) = 20/27 \geq 1/2$ en $f(1) + f(2) + f(3) = 19/27 \geq 1/2$, is de mediaan gelijk aan 1.

4. **a** Een uitkomstenruimte is $\{k, m\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Alle uitkomsten zijn gelijk waarschijnlijk, ieder kans 1/12.

b Een normale benadering met continuïteitscorrectie geeft

$$1 - \Phi\left(\frac{19.5 - 25}{5\sqrt{11/12}}\right) \approx 0,87.$$

c Zij $X = N(E)/300$, waar $N(E)$ het aantal keren is dat eventualiteit E optreedt. De centrale limietstelling zegt dat als het aantal worpen n naar oneindig gaat,

$$\sqrt{n}\frac{X - \mathbb{P}(E)}{\sqrt{\mathbb{P}(E)\,(1 - \mathbb{P}(E))}} \to \mathcal{N}(0,1).$$

Dus heeft X asymptotische variantie $\mathbb{P}(E)\,(1 - \mathbb{P}(E))/n$, hier met $n = 300$. Bovendien convergeert – op grond van de zwakke wet der grote aantallen en de continuïteit van de functie $x \to \sqrt{x\,(1-x)}$ op $(0,1)$ – $\sqrt{X\,(1-X)}$ in verdeling naar $\sqrt{\mathbb{P}(E)\,(1 - \mathbb{P}(E))}$, zodat

$$\sqrt{n}\frac{X - \mathbb{P}(E)}{\sqrt{X\,(1-X)}} \to \mathcal{N}(0,1).$$

Nog kwadrateren en door $n = 300$ delen, en we zijn klaar. Je zou ook de steekproefvariantie $S^2/n = X\,(1-X)/(n-1)$ kunnen gebruiken.