**Technische Universiteit Eindhoven**
Faculteit Wiskunde en Informatica

Tentamen **Kansrekening en Statistiek (2WS04)**,
vrijdag 19 juni 2009, van 9.00–12.00 uur.

Dit is een tentamen met gesloten boek. De uitwerkingen van de opgaven dienen duidelijk en overzichtelijk te worden opgeschreven. Elk onderdeel levert 10 punten op. Het cijfer is het totaal van de behaalde punten gedeeld door 14, afgerond op een geheel getal.

Op elk ingeleverd vel de naam van de student, de code van het college en de datum van het tentamen noteren.

U mag gebruik maken van een onbeschreven Statistisch Compendium en een (grafische) rekenmachine.

---

1. Een hand bestaat uit dertien kaarten, getrokken uit een goed geschud pak van tweeënvijftig kaarten.

   **a** Stel een toepasselijk kansmodel op voor het hierboven beschreven experiment.

   **b** Hoeveel handen zijn er met precies vier klaveren? En met precies drie klaveren?

   **c** Wat is in het in [a] opgestelde model de kans op een evenwichtige hand met minstens drie kaarten van elke kleur?

2. Zij $(X, Y)$ een discreet verdeelde stochastische vector met simultane kansdichtheid

$$e^{-3}\frac{3^i}{(i+1)!}, \qquad i, j \in \{(i,j) : i, j \in \mathbb{N}_0, j \leq i\},$$

   waar $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$.

   **a** Zijn $X$ en $Y$ onafhankelijk? Motiveer uw antwoord.

   **b** Bepaal de marginale kansdichtheden van $X$ en $Y$.

   **c** Geef de voorwaardelijke kansdichtheid van $X$ gegeven $Y$.

   **d** Bepaal $\mathrm{Cov}(X, Y)$. Interpreteer uw antwoord.

3. Geef een gemotiveerd antwoord op de volgende vragen.

   **a** De stochasten $X$ en $Y$ zijn onafhankelijk en uniform verdeeld op het interval $(0, 1)$. Bepaal de kansverdeling van $-\ln(XY)$.

   **b** De stochasten $X$ en $Y$ zijn onafhankelijk en exponentieel verdeeld met parameter $\lambda > 0$. Wat is de verwachting van $X/(X + Y)$.

   **c** Voor welke waarde van $c$ is de functie $f(x) = c\,e^{-x}x^2$ voor $x > 0$ en $f(x) = 0$ elders een kansdichtheid?

   **d** Een dobbelaar gooit twee maal met een zuivere dobbelsteen. Wat is de kansverdeling van het product der ogen?

4. Zij $X_1, \ldots, X_n$ een aselecte steekproef uit een uniforme verdeling op het interval $(-1, 1)$.

**a** Zij $Y_n = \min_{i=1,\ldots,n} X_i + \max_{i=1,\ldots,n} X_i$. Bewijs dat $Y_n$ convergeert in waarschijnlijkheid en geef de limietverdeling.

**b** Men kiest willekeurig $n = 100$ punten in het interval $(-1, 1)$. Gebruik de ongelijkheid van Chebychev om de kans dat het gemiddelde van deze punten meer dan $1/10$ van het punt nul is verwijderd af te schatten.

**c** Geef een goede benadering van $\mathbb{P}\{|\frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100} X_i| > \frac{1}{10}\}$.

*Succes!*

# Antwoorden

1. **a** De uitkomstenruimte bestaat uit de combinaties van 13 kaarten uit 52. Elke combinatie is even waarschijnlijk en heeft kans $1/\binom{52}{13}$.

   **b** Er zijn $\binom{13}{4}\binom{39}{9}$ handen met vier en $\binom{13}{3}\binom{39}{10}$ handen met 3 klaveren.

   **c** De kans op vier klaveren en drie kaarten in de andere kleuren is

$$p = \frac{\binom{13}{4}\binom{13}{3}^3}{\binom{52}{13}}.$$

   De gevraagde kans is $4p \approx 0,11$.

2. **a** De stochasten $X$ en $Y$ zijn afhankelijk omdat de drager geen rechthoek is.

   **b** De waardenverzameling is zowel voor $X$ als $Y$ is gelijk aan $\mathbb{N}_0$. Voor $i \in \mathbb{N}_0$ is

$$\mathbb{P}(X = i) = e^{-3} \sum_{j=0}^{i} \frac{3^i}{(i+1)!} = e^{-3} \frac{3^i}{i!},$$

   een Poissonverdeling met parameter 3. Verder is

$$\mathbb{P}(Y = j) = e^{-3} \sum_{i=j}^{\infty} \frac{3^i}{(i+1)!} = \frac{e^{-3}}{3} \sum_{i=j+1}^{\infty} \frac{3^i}{i!} = \frac{1}{3}(1 - F_X(j)),$$

   waar $F_X(\cdot)$ de verdelingsfunctie van $X$ is.

   **c** Gegeven $Y = j$ kan $X$ de waarden $i = j, j+1, \ldots$ aannemen. In dit geval is

$$\mathbb{P}(X = i \mid Y = j) = \frac{\mathbb{P}(X = i; Y = j)}{\mathbb{P}(Y = j)} = \frac{3\, e^{-3}\, 3^i}{(i+1)!(1 - F_X(j))}.$$

   **d** Duidelijk is dat $\mathbb{E}X = 3$. Verder is $Y$ gegeven $X$ homogeen verdeeld op $\{0, 1, \ldots, X\}$. Dus is

$$\mathbb{E}Y = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}(Y|X)\right] = \mathbb{E}\left[\frac{X}{2}\right] = 3/2$$

   en

$$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}\left[X\mathbb{E}(Y|X)\right] = \mathbb{E}\left[\frac{X^2}{2}\right] = (9+3)/2 = 6$$

   zodat $\mathrm{Cov}(X, Y) = 6 - 9/2 = 3/2$. Er is positieve correlatie omdat wanneer $X$ groot is, $Y$ ook grote waarden kan aannemen.

3. **a** De waardenverzameling van $-\ln X$ is $\mathbb{R}^+$ en voor $x > 0$ is

$$\mathbb{P}(-\ln X \leq x) = \mathbb{P}(X \geq e^{-x}) = 1 - e^{-x}.$$

   Derhalve is $-\ln X$ exponentieel verdeeld met verwachting 1. Hetzelfde geldt voor $-\ln Y$. Derhalve is $-\ln(XY) = -\ln X - \ln Y$ Erlang(2,1) verdeeld.

**b** Vanwege de symmetrie en het feit dat $X/(X+Y)$ en $Y/(X+Y)$ tot 1 sommeren is de gevraagde verwachting 1/2.

**c** $c = \Gamma(3)^{-1} = 1/2$.

**d** De kansdichtheid $p(\cdot)$ is: $p(1) = p(9) = p(16) = p(25) = p(36) = 1/36$; $p(2) = p(3) = p(5) = p(8) = p(10) = p(15) = p(18) = p(20) = p(24) = p(30) = 2/36$; $p(4) = 3/36$; $p(6) = p(12) = 4/36$; en $p \equiv 0$ voor andere waarden.

4. **a** Schrijf $F(y) = (y+1)/2$ voor de verdelingsfunctie van $X_1$, $y \in (-1,1)$. Zij $G^+(y) = 1\{y \geq 1\}$ en $G^-(y) = 1\{y \geq -1\}$. Merk op dat de verdelingsfunctie

$$1 - (1 - F(y))^n = 1 - 2^{-n}(1-y)^n$$

van het minimum der $X_i$ naar $G^-$ convergeert voor $y \neq -1$, de verdelingsfunctie

$$F(y)^n = 2^{-n}(y+1)^n$$

van het maximum naar $G^+$ voor $y \neq 1$. Het lemma van Slutsky impliceert dat $Y_n$ in waarschijnlijkheid convergeert naar 0.

**b** De ongelijkheid van Chebychev geeft:

$$\mathbb{P}\{\left|\frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100} X_i\right| > \frac{1}{10}\} \leq \mathrm{Var}\, X_1 = 1/3.$$

**c** We kunnen de verdeling van $\bar{X}_{100}$ benaderen met die van $Z \sim \mathcal{N}(0, 1/300)$. Een normale benadering geeft $2\Phi(-\sqrt(3)) \approx 0,08$.