Technische Universiteit Eindhoven
Faculteit Wiskunde en Informatica

Tentamen **Kansrekening en Statistiek (2WS04)**,
woensdag 30 juni 2010, van 9.00–12.00 uur.

Dit is een tentamen met gesloten boek. De uitwerkingen van de opgaven dienen duidelijk en overzichtelijk te worden opgeschreven. Elk onderdeel levert 10 punten op. Het cijfer is het totaal van de behaalde punten gedeeld door 13, afgerond op een geheel getal.

Op elk ingeleverd vel de naam van de student, de code van het college en de datum van het tentamen noteren.

U mag gebruik maken van een onbeschreven Statistisch Compendium en een (grafische) rekenmachine.

Er is een staropgave opgenomen in het kader van het Honours-Starprogramma.

---

1. Een kruidenier geeft zijn klanten ter gelegenheid van het wereldkampioenschap voetbal bij elke tien euro aan boodschappen een rood, wit of blauw gekleurd figuurtje cadeau. De figuurtjes worden willekeurig getrokken uit een grote doos; elke kleur is even waarschijnlijk.

   a Mijnheer De Groot doet voor dertig euro boodschappen. Wat is de kans dat hij een rood, een wit en een blauw figuurtje cadeau krijgt?

   b Mevrouw De Jong haalt dagelijks voor tien euro aan boodschappen. Op maandag krijgt zij een blauw figuurtje. Wat is de voorwaardelijke kans dat zij pas op donderdag (dus na drie dagen) een niet-blauw figuurtje krijgt?

   c Ook mevrouw Den Ouden besteedt dagelijks tien euro aan boodschappen. Wat is de kans dat zij precies vier dagen moet winkelen om minstens één figuurtje van elke kleur te ontvangen?

2. Zij X homogeen verdeeld op het interval $[-\pi, \pi]$ en definieer de stochast Y door $Y := \cos(X)$.

   a Bepaal de verdelingsfunctie van Y.

   b Bepaal $\mathbb{E}Y$ en $\mathrm{Var}(Y)$.

   c Bereken $\mathrm{Cov}(X, Y)$.

   d Zijn X en Y onafhankelijk? Motiveer uw antwoord.

Zie ommezijde.

3. Zij X een stochastische variabele met verwachting μ en variantie σ^2. Definieer $r := |\mu|/\sigma$ (de zogenaamde *signal to noise ratio*).

a Bereken r wanneer X Poisson verdeeld is met parameter $\lambda > 0$.

b Bewijs dat voor elke constante $c > 0$,

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{X-\mu}{\mu}\right| \leq c\right) \geq 1 - \frac{1}{r^2c^2}.$$

c Zij X Poisson verdeeld met parameter 100. Geef een goede benadering van $\mathbb{P}(90 \leq X \leq 110)$. Vergelijk uw antwoord met de ondergrens uit onderdeel **b**.

4. Zij (X, Y) een absoluut continu verdeelde stochastische vector met simultane kansdichtheid

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\,\frac{1}{x}\,e^{-x^2/2} & 0 \leq y \leq x; x \geq 0 \\ 0 & \text{elders} \end{cases}$$

a Bereken een marginale kansdichtheid voor X.

b Bereken een voorwaardelijke kansdichtheid voor Y gegeven $X = x$, $x > 0$.

c Bepaal $\mathbb{E}Y$, $\mathrm{Var}(Y)$.

Succes!

Staropgave:

Als onderdeel van het Honours Starprogramma (verdiepend Honoursprogramma in de bacheloropleiding) kunt u de volgende starvraag proberen te maken. De uitslag van deze vraag kan onvoldoende of voldoende zijn. Het resultaat voldoende behaalt u als u minstens zes van de tien punten behaalt. Bij het resultaat voldoende wordt er een ster aan de tentamenbeoordeling toegevoegd. De uitslag van deze starvraag staat verder volledig los van de uitslag van het reguliere tentamen. Er kunnen dus ook geen rechten worden ontleend aan de uitslag van deze vraag ten aanzien van de uitslag van het reguliere tentamen. Indien u meedoet aan het progrmma is uw tentamentijd maximaal drie uur en dertig minuten.

Maak deze vraag op een apart vel.

Beschouw twee $\mathbb{R}^+$-waardige absoluut continu verdeelde stochasten X en Y met simultane kansdichtheid f en simultane verdelingsfunctie F. Neem aan dat $\mathbb{E}\left[X^2\right] < \infty$ en $\mathbb{E}\left[Y^2\right] < \infty$.

a Bewijs dat

$$\mathbb{E}X = \int_0^\infty [1 - F_X(x)]\, dx$$

waar F_X de marginale verdelingsfunctie van X is.

(*Voor dit onderdeel kunt u 3 punten behalen*).

b Bewijs dat

$$\mathbb{P}(X > x; Y > y) = 1 - F_X(x) - F_Y(y) + F(x, y)$$

waar F_Y de marginale verdelingsfunctie van Y is.

(*Voor dit onderdeel kunt u 2 punten behalen*).

c Bewijs dat

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \int_0^\infty \int_0^\infty [F(x, y) - F_X(x) F_Y(y)]\, dx\, dy.$$

(*Voor dit onderdeel kunt u 2 punten behalen*).

d Laat zien dat $F(x, y) \geq F_X(x)\, F_Y(y)$ voor alle $x, y \in \mathbb{R}^+$ impliceert dat $\mathrm{Cov}(X, Y) \geq 0$. Is de omgekeerde implicatie ook waar? Motiveer uw antwoord door bewijs of tegenvoorbeeld.

(*Voor dit onderdeel kunt u 3 punten behalen*).

Antwoorden

1. **a** Er zijn 6 permutaties van rood, wit en blauw bestaande uit verschillende kleuren (*4 punten*). Er zijn $3^3 = 27$ uitkomsten (*4 punten*). De gevraagde kans is dus $2/9$ (*2 punten*).

   b Zij X_i de kleur van het op dag i ontvangen figuurtje. De stochasten zijn onafhankelijk en homogeen op de drie kleuren verdeeld (*3 punten*). Ergo

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(X_4 \in \{\text{‘rood’, ‘wit’}\} \,; X_3 = X_2 = \text{‘blauw’} \mid X_1 = \text{ ’blauw’ }) \\ = \;& \mathbb{P}(X_4 \in \{\text{‘rood’, ‘wit’}\} \,; X_3 = X_2 = \text{‘blauw’}) \quad (2pt) \\ = \;& \mathbb{P}(X_4 \in \{\text{‘rood’, ‘wit’}\})\, \mathbb{P}(X_3 = \text{‘blauw’})\, \mathbb{P}(X_2 = \text{‘blauw’}) \quad (2pt) \\ = \;& \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{2}{27} \end{aligned}$$

   (*2 punten voor de kansen, 1 voor de vereenvoudiging*).

   c De uitkomstenruimte van $(X_1, \ldots, X_4)$ bevat $3^4 = 81$ elementen (*4 punten*). Hiervan zijn er 18 dusdanig dat mevrouw Den Ouden haar collectie in precies vier dagen compleet heeft (3 mogelijkheden voor de eerste kleur, 2 voor de laatste, en 3 mogelijkheden met tenminste 1 keer de ontbrekende kleur in het midden) (*4 punten*). De gevraagde kans is dus $18/81 = 2/9$ (*2 punten*). Alternatief: een voorwaardelijke aanpak à la onderdeel **b**.

2. **a** De waardenverzameling van Y is $[-1, 1]$ (*2 punten*). Voor $y \in [-1, 1]$ is

$$\mathbb{P}(Y \leq y) = \mathbb{P}(\cos(X) \leq y) = 2\mathbb{P}(X \geq \arccos y) = 2\,\frac{\pi - \arccos y}{2\pi}$$

   met gebruik van symmetrie (*2 punten voor herschrijven in termen van X, 2 punten voor symmetrie, 2 punten voor antwoord*). Voor $y \leq -1$ is $\mathbb{P}(Y \leq y) = 0$ (*1 punt*), voor $y \geq 1$ is $\mathbb{P}(Y \leq y) = 1$ (*1 punt*).

   b Op grond van de wet van de bewusteloze statisticus (*2 punten*) is

$$\mathbb{E}\cos(X) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos x}{2\pi}\, dx = \frac{1}{2\pi}\left[\sin x\right]_{-\pi}^{\pi} = 0$$

   (*1 punt voor de primitieve, 1 voor het antwoord*). Verder is $\mathrm{Var}(Y) = \mathbb{E}(Y^2) - (\mathbb{E}Y)^2 = \mathbb{E}(Y^2)$ (*2 punten*). Merk op dat $\mathbb{E}\left[\cos^2(X)\right] = \mathbb{E}\left[\cos(2X) + 1\right]/2$ (*1 punt*) en pas weer de wet van de bewusteloze statisticus toe: (*1 punt*)

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(2x)\, dx = \frac{1}{2} + \left[\frac{\sin(2x)}{8\pi}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2}$$

   (*1 punt voor de primitieve, 1 voor het antwoord*).

   c Omdat

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathrm{Cov}(X, \cos(X)) = \mathbb{E}\left[X\, \cos(X)\right] - \mathbb{E}X\, \mathbb{E}\cos(X) = \mathbb{E}\left[X\, \cos(X)\right]$$

   (*2 punten definitie, 2 punten beroep op vorige onderdeel*) passen we partiële integratie toe: (*2 punten elke gelijkheid*)

$$\mathbb{E}\left[X\cos(X)\right] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\, \cos x\, dx = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin x\, dx = 0.$$

   Ergo $\mathrm{Cov}(X, \cos X) = 0$ (*2 punten*).

d X en Y zijn afhankelijk. Bijvoorbeeld:

$$\mathbb{P}(X \in [-\pi/2, \pi/2]; Y \in [-1, 0]) = 0 \neq \mathbb{P}(X \in [-\pi/2, \pi/2])\, \mathbb{P}(Y \in [-1, 0])$$

(*10 punten voor een voorbeeld; 3 voor intuïtief verhaal*).

3. **a** Aangezien $\mu = \lambda = \sigma^2$ (*2 punten elk*) is $r = \sqrt{\lambda}$ (*6 punten*).

b Gebruik de ongelijkheid van Chebychev:

$$\mathbb{P}(|X - \mu| \geq c|\mu|) \leq \frac{\sigma^2}{c^2\mu^2}$$

(*5 punten*). Dus is

$$\mathbb{P}(|X - \mu| \leq c|\mu|) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{c^2\mu^2} = 1 - \frac{1}{r^2c^2}$$

(*2 punten overgaan complement, 3 punten herschrijven in termen van r*).

c Normale benadering met continuïteitscorrectie (*2 punten*) geeft

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(90 \leq X \leq 110) &= \mathbb{P}(X \leq 110.5) - \mathbb{P}(X \leq 89.5) \\ &= \mathbb{P}(\frac{X - 100}{10} \leq 1,05) - \mathbb{P}(\frac{X - 100}{10} \leq -1,05) \\ &\approx \Phi(1,05) - \Phi(-1,05) = 2\Phi(1,05) - 1 \approx 0,706 \end{aligned}$$

(*5 punten: 3 voor het standaardiseren, 1 voor de Φs en 1 voor het antwoord*). Op grond van onderdeel **a** is $r = 10$ (*1 punt*). Dit en $c = 1/10$ invullen in **b** geeft ondergrens 0 (*1 punt*). De normale benadering is veel beter (*1 punt*). PS: De kans is $0,707$.

4. **a** Integratie van $f(x, y)$ over y (*2 punten*) geeft

$$f_X(x) = \int_0^x \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\, \frac{1}{x}\, e^{-x^2/2}\, dy = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\, e^{-x^2/2}$$

voor $x \geq 0$ (*6 punten*); $f_X(x) = 0$ elders (*2 punten*).

b Per definitie (*2 punten*) is

$$f(y|x) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)} = \frac{1}{x}$$

voor $y \in [0, x]$ (*6 punten*) en $f(y \mid x) = 0$ elders (*2 punten*). NB: een uniforme verdeling op $[0, x]$.

c De kansverdeling van Y is lastig. Dus gebruiken we

$$\begin{aligned} \mathbb{E}Y &= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[Y \mid X\right]\right]; \\ \mathrm{Var}(Y) &= \mathbb{E}\left[\mathrm{Var}(Y \mid X)\right] + \mathrm{Var}\left(\mathbb{E}\left[Y \mid X\right]\right) \end{aligned}$$

(*1 punt elk*). Met behulp van **b**: $\mathbb{E}[Y|X] = X/2$ (*1 punt*) en $\mathrm{Var}(Y \mid X) = X^2/12$ (*1 punt*). Met behulp van **a** nog de momenten van X uitrekenen:

$$\mathbb{E}X = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty x e^{-x^2/2}\, dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}},$$

cf. dichtheid Weibullverdeling (*2 punten*) en

$$\mathbb{E}\left[X^2\right] = 1$$

(*2 punten*). Invullen geeft $\mathbb{E}Y = (2\pi)^{-1/2}$ en $\mathrm{Var}(Y) = \frac{1}{3} - \frac{1}{2\pi}$ (*1 punt elk*).