

Tentamen **Kansrekening (2WS13)**,
dinsdag 19 juni 2009, van 9.00–12.00 uur.

Dit is een tentamen met gesloten boek. De uitwerkingen van de opgaven dienen duidelijk en overzichtelijk te worden opgeschreven. Elk onderdeel levert 10 punten op. Het cijfer is het totaal van de behaalde punten gedeeld door 14, afgerond op een geheel getal.

Op elk ingeleverd vel de naam van de student, de code van het college en de datum van het tentamen noteren.

U mag gebruik maken van een onbeschreven Statistisch Compendium en een (grafische) rekenmachine.

1. Een hand bestaat uit dertien kaarten, getrokken uit een goed geschud pak van tweeënvijftig kaarten.
 - a Stel een toepasselijk kansmodel op voor het hierboven beschreven experiment.
 - b Hoeveel handen zijn er met precies vier klaveren? En met precies drie klaveren?
 - c Wat is in het in [a] opgestelde model de kans op een evenwichtige hand met minstens drie kaarten van elke kleur?

2. Zij (X, Y) een discreet verdeelde stochastische vector met simultane kansdichtheid

$$e^{-3} \frac{3^i}{(i+1)!}, \quad i, j \in \{(i, j) : i, j \in \mathbb{N}_0, j \leq i\},$$

waar $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$.

- a Zijn X en Y onafhankelijk? Motiveer uw antwoord.
 - b Bepaal de marginale kansdichtheden van X en Y .
 - c Geef de voorwaardelijke kansdichtheid van X gegeven Y .
 - d Bepaal $\text{Cov}(X, Y)$. Interpreteer uw antwoord.
3. Geef een gemotiveerd antwoord op de volgende vragen.
 - a De stochasten X en Y zijn onafhankelijk en uniform verdeeld op het interval $(0, 1)$. Bepaal de kansverdeling van $-\ln(XY)$.
 - b De stochasten X en Y zijn onafhankelijk en exponentieel verdeeld met parameter $\lambda > 0$. Wat is de verwachting van $X/(X + Y)$.
 - c Voor welke waarde van c is de functie $f(x) = ce^{-x}x^2$ voor $x > 0$ en $f(x) = 0$ elders een kansdichtheid?
 - d Een dobbelaar gooit twee maal met een zuivere dobbelsteen. Wat is de kansverdeling van het product der ogen?

4. Beschouw het volgende spel. Trek eerst een lootje uit een bak met tien 0-lootjes en vijf 1-lootjes. De uitkomst is een stochast die we X noemen. Na trekking van een 0-lootje werpt de speler een zware bal zo ver mogelijk van zich af, bij trekking van een 1-lootje mag met een lichtere bal worden geworpen. De lengte (afstand tot de speler) van de worp in meter is Gamma verdeeld met vormparameter $k = 3$ en intensiteitsparameter respectievelijk $\lambda = \frac{1}{6}$ en $\lambda = \frac{1}{30}$ (in m^{-1}).

a Zij Y de lengte van de worp. Bepaal $\mathbb{E}(Y)$ en $\text{Var}(Y)$.

b Bewijs direct (zonder beroep op een stelling uit het boek) dat voor elke discreet eindige stochast X en elke absoluut continu verdeelde stochast Y met eindige verwachting en gedefinieerd op dezelfde onderliggende kansruimte geldt dat

$$\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X\mathbb{E}[Y | X]].$$

c Bereken de correlatie $\rho(X, Y)$. Interpreteer uw antwoord.

Succes!

ANTWOORDEN

1. **a** De uitkomstenruimte bestaat uit de combinaties van 13 kaarten uit 52. Elke combinatie is even waarschijnlijk en heeft kans $\binom{52}{13}$.
- b** Er zijn $\binom{13}{4}\binom{39}{9}$ handen met vier en $\binom{13}{3}\binom{39}{10}$ handen met 3 klaveren.
- c** De kans op vier klaveren en drie kaarten in de andere kleuren is

$$p = \frac{\binom{13}{4} \binom{13}{3}^3}{\binom{52}{13}}.$$

De gevraagde kans is $4p \approx 0,11$.

2. **a** De stochasten X en Y zijn afhankelijk omdat de drager geen rechthoek is.
- b** De waardenverzameling is zowel voor X als Y is gelijk aan \mathbb{N}_0 . Voor $i \in \mathbb{N}_0$ is

$$\mathbb{P}(X = i) = e^{-3} \sum_{j=0}^i \frac{3^j}{(j+1)!} = e^{-3} \frac{3^i}{i!},$$

een Poissonverdeling met parameter 3. Verder is

$$\mathbb{P}(Y = j) = e^{-3} \sum_{i=j}^{\infty} \frac{3^i}{(i+1)!} = \frac{e^{-3}}{3} \sum_{i=j+1}^{\infty} \frac{3^i}{i!} = \frac{1}{3}(1 - F_X(j)),$$

waar $F_X(\cdot)$ de verdelingsfunctie van X is.

- c** Gegeven $Y = j$ kan X de waarden $i = j, j+1, \dots$ aannemen. In dit geval is

$$\mathbb{P}(X = i | Y = j) = \frac{\mathbb{P}(X = i; Y = j)}{\mathbb{P}(Y = j)} = \frac{3e^{-3}3^i}{(i+1)!(1 - F_X(j))}.$$

- d** Duidelijk is dat $\mathbb{E}X = 3$. Verder is Y gegeven X homogeen verdeeld op $\{0, 1, \dots, X\}$. Dus is

$$\mathbb{E}Y = \mathbb{E}[\mathbb{E}(Y|X)] = \mathbb{E}\left[\frac{X}{2}\right] = 3/2$$

en

$$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}[X\mathbb{E}(Y|X)] = \mathbb{E}\left[\frac{X^2}{2}\right] = (9+3)/2 = 6$$

zodat $\text{Cov}(X, Y) = 6 - 9/2 = 3/2$.

3. **a** De waardenverzameling van $-\ln X$ is \mathbb{R}^+ en voor $x > 0$ is

$$\mathbb{P}(-\ln X \leq x) = \mathbb{P}(X \geq e^{-x}) = 1 - e^{-x}.$$

Derhalve is $-\ln X$ exponentieel verdeeld met verwachting 1. Hetzelfde geldt voor $-\ln Y$.
Derhalve is $-\ln(XY) = -\ln X - \ln Y$ Erlang(2) verdeeld.

- b** Vanwege de symmetrie en het feit dat $X/(X+Y)$ en $Y/(X+Y)$ tot 1 sommeren is de gevraagde verwachting $1/2$.

c $c = \Gamma(3)^{-1} = 1/2$.

d De kansdichtheid $p(\cdot)$ is: $p(1) = p(9) = p(16) = p(25) = p(36) = 1/36$; $p(2) = p(3) = p(5) = p(8) = p(10) = p(15) = p(18) = p(20) = p(24) = p(30) = 2/36$; $p(4) = 3/36$; en $p(6) = 4/36$; $p(12) = 4/36$; en $p \equiv 0$ voor andere waarden.

4. **a** $\mathbb{E}Y = \mathbb{E}\mathbb{E}[Y | X] = \frac{1}{3}\mathbb{E}[Y | X = 1] + \frac{2}{3}\mathbb{E}[Y | X = 0] = 30 + 12 = 42$ meter.

$$\text{Var } Y = \mathbb{E} \text{Var}[Y | X] + \text{Var} \mathbb{E}[Y | X] = \frac{1}{3} \frac{3}{1/30^2} + \frac{2}{3} \frac{3}{1/6^2} + \left\{ \frac{1}{3} 90^2 + \frac{2}{3} 18^2 - 42^2 \right\} = 2124 m^2.$$

b Zie boek.

c X is Bernoulli verdeeld met succesparameter $p = 1/3$. Dus $\mathbb{E}X = 1/3$ en $\text{Var } X = 2/9$. Verder is $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X\mathbb{E}[Y | X]] = \frac{1}{3} \frac{3}{1/30} = 30$ meter. Zodoende is

$$\rho(X, Y) = \frac{\mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}X \mathbb{E}Y}{\sqrt{\text{Var}(X) \text{Var}(Y)}} = 16/\sqrt{472} \approx 0,7.$$

Er is een vrij sterke positieve correlatie omdat wanneer er 1 wordt geloot de lengte van de worp meestal groter is dan wanneer er 0 wordt geloot.