

Tentamen **Mathematische Statistiek (2WS05)**,  
maandag 5 januari 2009, van 14.00–17.00 uur.

Dit is een tentamen met gesloten boek. De uitwerkingen van de opgaven dienen duidelijk en overzichtelijk te worden opgeschreven. Elk onderdeel levert 10 punten op. Het cijfer is het totaal van de behaalde punten gedeeld door 13, afgerond op een geheel getal.

Op elk ingeleverd vel de naam van de student, de code van het college en de datum van het tentamen noteren.

U mag gebruik maken van een onbeschreven Statistisch Compendium en een (grafische) rekenmachine.

---

1. Zij  $X_1, \dots, X_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , een aselechte steekproef uit een homogene verdeling op het interval  $(-\theta, \theta)$  voor  $\theta > 0$ .
  - a Vormt de familie verdelingen van  $(X_1, \dots, X_n)$  een exponentiële familie? Motiveer uw antwoord.
  - b Bepaal een afdoende statistische grootte voor  $(X_1, \dots, X_n)$  met betrekking tot  $\theta$ .
  - c Is de in [b] bepaalde statistische grootte volledig? Waarom wel/niet?
  - d Geef een zuivere schatter voor  $\theta$  gebaseerd op de afdoende statistische grootte. Is deze schatter een UMVZ-schatter? Motiveer uw antwoord.
  - e Bepaal de Fisher-informatie. Hoe verhoudt deze zich tot de variantie van de schatter uit [d]?
2. Zij  $X_1, \dots, X_n$  een aselechte steekproef uit een geometrische verdeling met parameter  $p \in (0, 1)$ .
  - a Bepaal een momentenschatter en meest aannemelijke schatter voor  $p$ . Bediscussieer de kwaliteit van deze schatters.
  - b Bepaal een UMVZ-schatter voor  $p$ .

3. De stochast  $X$  is Rayleigh-verdeeld, i.e.  $X$  heeft kansdichtheid

$$f(x; \lambda) = 2\lambda^2 x \exp[-\lambda^2 x^2], \quad x \in \mathbb{R}^+,$$

voor  $\lambda > 0$ .

- a Laat zien dat de verdelingsfunctie van  $X$  gegeven wordt door

$$F(x; \lambda) = 1 - \exp[-\lambda^2 x^2], \quad x \in \mathbb{R}^+,$$

en gebruik dit feit om een exact 90% betrouwbaarheidsinterval voor  $\lambda$  te construeren gebaseerd op een aselechte steekproef  $X_1, \dots, X_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , uit  $f(x; \lambda)$ .

- b Men wenst de nulhypothese  $\lambda \leq 5$  te toetsen tegen het alternatief  $\lambda > 5$  bij onbetrouwbaarheidsdrempel 10%. Geef een geschikte toetsingsgrootte en kritiek gebied. Motiveer uw antwoorden.
- c Bepaal het onderscheidingsvermogen van de toets in [b] en schets de grafiek.

4. De fabrikant van een wolwasmiddel wil onderzoeken of truitjes bij het wassen met zijn product minder krimpen dan wanneer men een concurrerend middel gebruikt.

**a** De fabrikant knipt tien wollen truitjes doormidden en wast de ene helft met het eigen product, de andere helft met het wasmiddel van de concurrent. Na het wassen worden de lengtes gemeten, met het volgende resultaat:

truitje	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
eigen product	61,2	58,3	56,7	59,1	62,7	61,3	57,8	55,7	61,8	60,7
product concurrent	61,5	58,2	59,0	58,6	62,4	61,2	55,0	55,0	61,4	61,0

Construeer een geschikte toets bij onbetrouwbaarheidsdrempel  $\alpha = 0,05$ . Mag de fabrikant concluderen dat zijn wolwasmiddel beter is dan dat van zijn concurrent? Welke veronderstellingen zijn gemaakt?

**b** De fabrikant wast tien wollen truitjes met het eigen product en tien andere truitjes met het wasmiddel van de concurrent. Na het wassen worden de lengtes gemeten, met het volgende resultaat:

eigen product	61,2	58,3	56,7	59,1	62,7	61,3	57,8	55,7	61,8	60,7
product concurrent	61,5	58,2	59,0	58,6	62,4	61,2	55,0	55,0	61,4	61,0

Construeer een geschikte toets bij onbetrouwbaarheidsdrempel  $\alpha = 0,05$ . Mag de fabrikant concluderen dat zijn wolwasmiddel beter is dan dat van zijn concurrent? Welke veronderstellingen zijn gemaakt?

**c** Hoe zou men kunnen nagaan of de in [a] en [b] gemaakte veronderstellingen redelijk zijn? Schrijf een R-script voor dit doel. U mag gebruik maken van bestaande R-functies.

*Succes!*