Technische Universiteit Eindhoven
Faculteit Wiskunde en Informatica

Tentamen **Mathematische Statistiek (2WS05)**,
dinsdag 26 januari 2010, van 14.00–17.00 uur.

Dit is een tentamen met gesloten boek. De uitwerkingen van de opgaven dienen duidelijk en overzichtelijk te worden opgeschreven. Elk onderdeel levert 10 punten op. Het cijfer is het totaal van de behaalde punten gedeeld door 13, afgerond op een geheel getal.

Op elk ingeleverd vel de naam van de student, de code van het college en de datum van het tentamen noteren.

U mag gebruik maken van een onbeschreven Statistisch Compendium en een (grafische) rekenmachine.

---

1. Zij $\theta > 0$ en $X_1, \ldots, X_n$ een aselecte steekproef uit een absoluut continue verdeling met kansdichtheid
$$f(x; \theta) = 3\theta^{-3}x^2$$
voor $x \in [0, \theta]$ en 0 elders.

   a Bepaal een momentenschatter voor θ.

   b Bewijs dat er een meest aannemelijke schatter voor θ bestaat en bepaal deze schatter.

   c Geef minstens twee criteria voor het vergelijken van schatters. Prefereert u op basis van deze criteria de schatter uit [a] of uit [b]?

2. De uitbater van een oliebollenkraam biedt veertig willekeurige voorbijgangers een oliebol aan en vraagt hen om een cijfer te geven op een schaal van 1 (heel vies) tot 10 (overheerlijk). Hij gebruikt het R-commando 'stem' om de resultaten te tabelleren:

```
> stem(oliebol)

  The decimal point is at the |

   1 | 000000
   2 |
   3 |
   4 |
   5 | 0000
   6 | 00000000
   7 | 000000
   8 | 0000000000
   9 | 0000
  10 | 00
```

   Hier betekent (bijvoorbeeld) de eerste regel dat zes mensen een 1 hebben gegeven.

a Interpreteer de data (denk bijvoorbeeld aan de vorm van de verdeling, uitbijters, relevante aspecten voor de uitbater, etc.).

b Noem drie andere opties die R biedt om de data weer te geven. Bespreek voor- en nadelen van elk der opties.

3. Zij $\theta > 0$ en $X_1, \ldots, X_n$ een aselecte steekproef uit een absoluut continue verdeling met kansdichtheid
$$f(x;\theta) = (\pi\theta)^{-1/2} \exp\left[-\theta^{-1}x^2\right]$$
voor $x \in \mathbb{R}$.

a Vormt de familie $\{\prod_{i=1}^n f(x_i;\theta) : \theta > 0\}$ van simultane kansdichtheden een exponentiële familie? Motiveer uw antwoord.

b Bepaal een zuivere schatter van θ. Wat is zijn variantie?

c Is de schatter uit [b] een UMVZ-schatter? Waarom wel/niet?

d Construeer een 95% betrouwbaarheidsinterval voor θ.

4. Zij $X_1, \ldots, X_{10}$ een aselecte steekproef uit een Bernoulliverdeling met succeskans $p \in [0,1]$. Er worden acht successen waargenomen.

a Stel een toets op voor de nulhypothese $p = 1/2$ tegen het alternatief $p > 1/2$ met (exacte) onbetrouwbaarheid $0,05$. Wat is uw conclusie?

b Bepaal het onderscheidingsvermogen van de toets uit [a] voor $p \in [0,1]$ en schets de grafiek.

c Toets de nulhypothese $p = 1/2$ tegen het alternatief $p \neq 1/2$ bij onbetrouwbaarheidsdrempel $0,05$. Vergelijk het onderscheidingsvermogen van deze toets met uw antwoord op opgave [b].

d Bepaal de tweezijdige overschrijdingskans. Wat is uw conclusie?

Succes!

1. **a** Omdat

$$\mathbb{E}X_1 = \int_0^\theta 3\theta^{-3}\,x^3\,dx = \frac{3}{4}\,\theta$$

is $\hat{\theta} = 4\bar{X}/3$.

b De simultane kansdichtheid $3^n\,\theta^{-3n}\prod_{i=1}^n x_i^2$ is dalend in θ voor $x_i \in [0,\theta]$. De meest aannemelijke schatter is dus $\tilde{\theta} = X_{(n)}$, de grootste der X_i.

c De momentenschatter is zuiver, maar $X_{(n)}$ hoeft niet kleiner dan of gelijk aan $\hat{\theta}$ te zijn. Dit laatste geldt wel voor de meest aannemelijke schatter, maar die is niet zuiver. Om dit in te zien, merken we eerst op dat $\mathbb{P}(X_{(n)} \le k) = \mathbb{P}(X_1 \le k)^n$. Voor $k \in (0,\theta)$ is

$$\mathbb{P}(X_1 \le k) = 3\theta^{-3}\int_0^k x^2\,dx = \left(\frac{k}{\theta}\right)^3.$$

Dus is, voor $x \in (0,\theta)$, $3nx^{3n-1}\theta^{-3n}$ een kansdichtheid voor $X_{(n)}$. Derhalve is

$$\mathbb{E}X_{(n)} = \frac{3n}{\theta^{3n}}\int_0^\theta x^{3n}\,dx = \frac{3n}{3n+1}\,\theta \neq \theta.$$

U had ook de variantie of kwadratische fout kunnen bekijken.

2. **a** Er zijn twee groepen voorbijgangers: de mensen die een 1 geven (oliebollenhaters), en de overigen. De overigen vinden de kwaliteit van de oliebollen over het algemeen wel in orde (6–8), met wat afwijkingen naar beneden (5) of naar boven (9 of 10). De vorm van de kansdichtheid is niet symmetrisch, dus niet normaal. Er zijn geen duidelijke uitschieters.

b Alternatieven zijn

- 'summary' geeft min/max, kwantielen en gemiddelde. Je krijgt een snelle indruk en expliciete informatie over kwantielen, maar weinig visueel inzicht in de vorm van de kansdichtheid.
- 'histogram' is vergelijkbaar met stem maar visueler. De breedte van de intervallen is cruciaal, het is makkelijk een verkeerde indruk te krijgen.
- 'boxplot' is goed om een indruk te krijgen van de spreiding en outliers, minder goed voor de vorm van de kansdichtheid.

3. **a** Ja, met afdoende statistische grootheid $\sum_{i=1}^n X_i^2$.

b Merk op dat u met een normale verdeling van doen hebt met verwachting 0 en variantie $\theta/2$. Dus is $\mathbb{E}\sum_i X_i^2 = n\mathbb{E}X_1^2 = n\ \mathrm{Var}\,X_1 = n\,\theta/2$. Derhalve is $\frac{2}{n}\sum_i X_i^2$ een zuivere schatter. De schatter is verdeeld als $\theta\chi_n^2/n$ en heeft dus variantie $2\theta^2/n$.

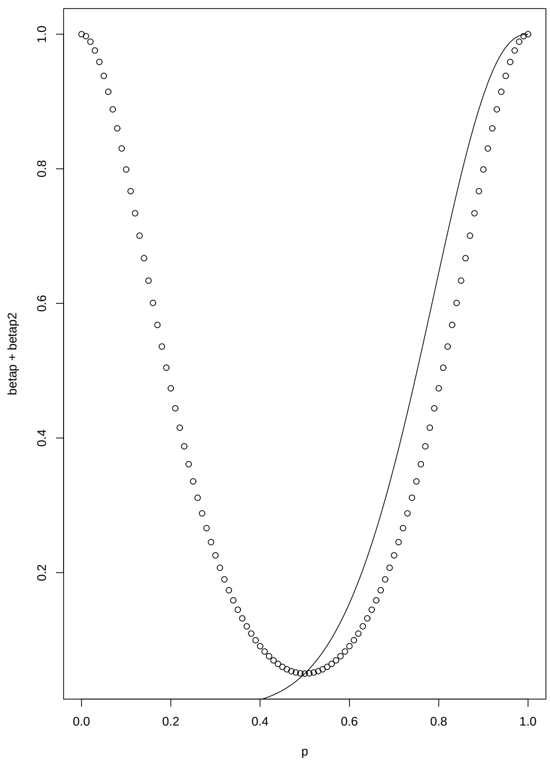
c We hebben een steekproef uit een 1-parameter exponentiële familie. De verzameling $\{Q(\theta) : \theta > 0\} = \{-\theta^{-1} : \theta > 0\} = \mathbb{R}^-$ bevat een interval, bijvoorbeeld $(-2,-1)$. Derhalve bestaat er ten hoogste één zuivere schatter gebaseerd op $\sum_{i=1}^n X_i^2$. De schatter uit [b] is zuiver en gebaseerd op de afdoende statistische grootheid, en dus UMVZ.

d Gebruik dat $\frac{2}{n}\sum_i X_i^2$ verdeeld is als $\theta\chi_n^2/n$. Nu is

$$\alpha = \mathbb{P}_\theta\left(\chi^2_{n;\alpha/2} < \frac{2}{\theta}\sum_{i=1}^n X_i^2 < \chi^2_{n;1-\alpha/2}\right) = \mathbb{P}_\theta\left(\frac{2\sum_{i=1}^n X_i^2}{\chi^2_{n;1-\alpha/2}} < \theta < \frac{2\sum_{i=1}^n X_i^2}{\chi^2_{n;\alpha/2}}\right).$$

waaruit u het betrouwbaarheidsinterval af kunt lezen.

4.



a Verwerp de nulhypothese voor grote waarden van $\sum X_i$. We willen $\mathbb{P}_{1/2}(\sum_{i=1}^{10} X_i \geq c_\alpha) \approx \alpha = 0,05$. Voor $c_\alpha = 7$ vinden we een kans van $0,17$, voor $c_\alpha = 8$ een kans van $0,055$ en voor $c_\alpha = 9$ tenslotte $0,011$. Dus wordt de nulhypothese verworpen bij 9 successen, niet verworpen bij 7 successen. Wanneer men acht successen vindt, wordt randomisatie toegepast: met kans

$$p_r = \frac{0,05 - \mathbb{P}_{1/2}(\sum_{i=1}^{10} X_i \geq 9)}{\mathbb{P}_{1/2}(\sum_{i=1}^{10} X_i = 8)} \approx 0,89$$

wordt de nulhypothese verworpen, met de complementaire kans niet.

b Merk op dat

$$\begin{aligned}\beta(p) &= \mathbb{P}_p(\sum_{i=1}^{10} X_i \geq 9) + p_r\, \mathbb{P}_p(\sum_{i=1}^{10} X_i = 8) \\ &= p^8 \left[p^2 + 10\, p\, (1-p) + 45\, p_r\, (1-p)^2\right].\end{aligned}$$

De doorgetrokken lijn in de figuur schetst de grafiek.

c Op basis van de bij [a] uitgerekende kansen zien we dat de nulhypothese wordt verworpen als het aantal successen in de verzameling $\{0, 1, 9, 10\}$ ligt met randomisatie voor twee of acht successen. Voor de laatste twee gevallen wordt de nulhypothese met kans

$$\tilde{p}_r = \frac{0,025 - \mathbb{P}_{1/2}(\sum_{i=1}^{10} X_i \geq 9)}{\mathbb{P}_{1/2}(\sum_{i=1}^{10} X_i = 8)} \approx 0,32$$

elk verworpen. Het onderscheidingsvermogen is

$$\begin{aligned}\beta(p) &= p^8 \left[p^2 + 10\, p\, (1-p) + 45\, \tilde{p}_r\, (1-p)^2\right] \\ &+ (1-p)^8 \left[(1-p)^2 + 10\, p\, (1-p) + 45\, \tilde{p}_r\, p^2\right].\end{aligned}$$

De stippellijn in de figuur schetst de grafiek. Per arm is het onderscheidingsvermogen iets slechter dan voor de eenzijdige toets, maar dit wordt gecompenseerd door het feit dat aan de andere kant het onderscheidingsvermogen niet wegzakt.

d $2 \min\{\mathbb{P}_{1/2}(\sum_{i=1}^{10} X_i \geq 8), \mathbb{P}_{1/2}(\sum_{i=1}^{10} X_i \leq 8)\} \approx 0,11$. De nulhypothese kan niet worden verworpen.