Technische Universiteit Eindhoven
Faculteit Wiskunde en Informatica

Tentamen **Mathematische Statistiek (2WS05)**,
donderdag 12 maart 2009, van 14.00–17.00 uur.

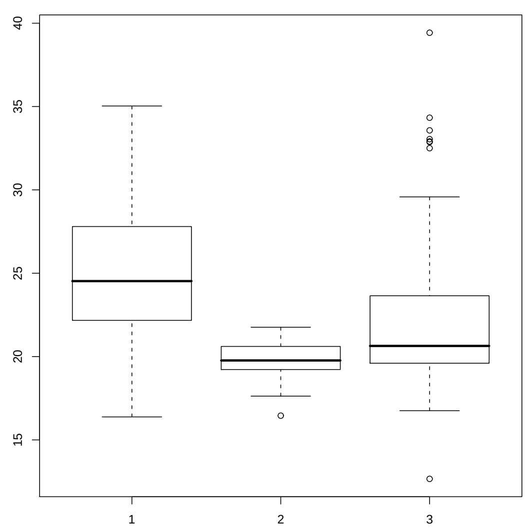
Dit is een tentamen met gesloten boek. De uitwerkingen van de opgaven dienen duidelijk en overzichtelijk te worden opgeschreven. Elk onderdeel levert 10 punten op. Het cijfer is het totaal van de behaalde punten gedeeld door 13, afgerond op een geheel getal.

Op elk ingeleverd vel de naam van de student, de code van het college en de datum van het tentamen noteren.

U mag gebruik maken van een onbeschreven Statistisch Compendium en een (grafische) rekenmachine.

---

1. Een café heeft drie medewerkers. Hun chef wil weten of zij even grote biertjes tappen. Daartoe meet hij voor elk van de medewerkers de inhoud van honderd door hen gevulde glazen (in ml). Hij vat de data samen in een boxplot.



a Geeft de data aanleiding om te veronderstellen dat er verschillen zijn tussen de medewerkers? Zo ja, in welke zin? Motiveer uw antwoord.

b Concentreer u op medewerkers 1 en 2. Stel een kansmodel op voor de inhoud van door deze medewerkers gevulde bierglazen.

c Hoe zou de chef binnen het in [b] opgestelde model kunnen toetsen of medewerkers 1 en 2 even grote biertjes tappen?

2. Zij $X_1, \ldots, X_n$ een aselecte steekproef uit een verdeling met kansdichtheid

$$f(x; \lambda) = \lambda \, x^{\lambda - 1}$$

op het interval $(0, 1)$ met $\lambda > 0$.

a Bewijs dat er een meest aannemelijke schatter voor λ bestaat en bepaal deze schatter.

b Bepaal de Cramér–Rao ondergrens.

c Laat zien dat $-\log X_1$ exponentieel verdeeld is en gebruik dit resultaat om een UMVZ-schatter te bepalen voor $1/\lambda$.

d Is de meest aannemelijke schatter uit [a] UMVZ voor λ? Motiveer uw antwoord.

3. De absoluut continue stochast X is Fréchet-verdeeld, i.e. X heeft kansdichtheid

$$f(x; \lambda) = \frac{2\,\lambda}{x^3} \exp\left[\frac{-\lambda}{x^2}\right]$$

voor $x \in \mathbb{R}^+$ en $\lambda > 0$.

a Construeer een exact 90% betrouwbaarheidsinterval voor λ gebaseerd op een aselecte steekproef $X_1, \ldots, X_n$, $n \in \mathbb{N}$, uit $f(x; \lambda)$.

b Kan men het in [a] geconstrueerde betrouwbaarheidsinterval gebruiken om een toets te construeren omtrent λ? Motiveer uw antwoord.

4. De stochast X is Poisson verdeeld met parameter $\lambda > 0$. Werk bij onbetrouwbaarheidsdrempel $0,05$.

a Formuleer het fundamentele lemma van Neyman–Pearson.

b Geef een meest onderscheidende toets voor de enkelvoudige nulhypothese $\lambda = 1$ tegen het alternatief $\lambda = 3$.

c Construeer een uniform meest onderscheidende toets voor de samengestelde nulhypothese $\lambda \leq 1$ tegen het alternatief $\lambda > 1$.

d Bepaal een likelihood ratio toets voor de nulhypothese $\lambda = 1$ tegen het alternatief $\lambda \neq 1$.

Succes!