

Uitwerking tentamen **Mathematische Statistiek (2WS05)**,
donderdag 12 maart 2009, van 14.00–17.00 uur.

1. **a** Medewerker 1 schenkt royale glazen, met een grote variatie. Medewerker 2 schenkt zuinig maar precies. Beide verdelingen zijn redelijk symmetrisch. Medewerker 3 schenkt over het algemeen net iets meer dan medewerker 2 maar met een grotere variatie. Er zijn veel uitbijters naar boven; de verdeling is scheef.
- b** Zij X_1, \dots, X_{100} een aselechte steekproef van door medewerker 1 gevulde glazen, Y_1, \dots, Y_{100} een aselechte steekproef van glazen gevuld door medewerker 2. Veronderstel dat X_i onafhankelijk en normaal verdeeld zijn met verwachting μ_1 en variantie σ_1^2 , Y_i onafhankelijk en normaal verdeeld met verwachting μ_2 en variantie σ_2^2 . De twee steekproeven zijn onderling onafhankelijk.
- c** De chef wil de hypothese $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ toetsen tegen het alternatief $\mu_1 \neq \mu_2$. Op basis van de data is het niet redelijk te veronderstellen dat $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$. We lopen dus tegen het Behrens–Fisher probleem aan. Er zijn nu verschillende mogelijkheden. Omdat de steekproefomvangen gelijk zijn en redelijk groot, kan men de twee-steekproeven t -toets gebruiken met toetsingsgrootheid

$$\frac{\bar{Y} - \bar{X}}{\sqrt{S_1^2 + S_2^2} \sqrt{\frac{2 \times 99}{100 \times 198}}}$$

die asymptotisch t_{198} verdeeld is. Een andere aanpak is een normale benadering, met toetsingsgrootheid

$$\frac{\bar{Y} - \bar{X}}{\sqrt{S_1^2 + S_2^2} \sqrt{\frac{1}{100}}}$$

en een standaard normale limietverdeling. Boek en compendium geven ook t -benaderingen, die hier minder bruikbaar zijn vanwege het grote verschil in variantie tussen de twee steekproeven.

2. **a** De aannemelijkheidsvergelijking is

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \left[n \log \lambda + (\lambda - 1) \sum_{i=1}^n \log x_i \right] = \frac{n}{\lambda} + \sum_{i=1}^n \log x_i = 0$$

met als oplossing $\hat{\lambda} = -n / \sum \log x_i$. De tweede afgeleide $-n\lambda^{-2}$ is negatief, zodat $\hat{\lambda}$ het unieke maximum en derhalve de meest aannemelijke schatter is.

- b**

$$I(\lambda) = \mathbb{E} \left(\frac{\partial}{\partial \lambda} [\log \lambda + (\lambda - 1) \log X_1] \right)^2 = -\mathbb{E} \left(\frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} [\log \lambda + (\lambda - 1) \log X_1] \right) = \lambda^{-2}.$$

De ondergrens is dus λ^2/n .

c De waardenverzameling van $-\log X_1$ is $(0, \infty)$. Voor $x > 0$ is

$$\mathbb{P}\{-\log X_1 \leq x\} = \mathbb{P}\{X_1 \geq e^{-x}\} = \int_{e^{-x}}^1 \lambda x^{\lambda-1} dx = 1 - e^{-\lambda x}$$

zodat $-\log X_1$ exponentieel verdeeld is met parameter λ en verwachting $1/\lambda$. Merk op dat de simultane dichtheid van (X_1, \dots, X_n) een 1-parameter exponentiële familie vormt met afdoende grootheid $T = \sum \log X_i$ en $Q(\lambda) = \lambda - 1$. Merk op dat $\{Q(\lambda) : \lambda > 0\} = (-1, \infty)$ een interval bevat. Er is dus ten hoogste één zuivere schatter van λ gebaseerd op T . De schatter $-T/n$ is zuiver, en op basis van de stelling van Rao-Blackwell ook UMVZ. U kunt ook opmerken dat de variantie van $-T/n$ gelijk is aan $1/(nI(\lambda))$ en de stelling van Cramér-Rao toepassen.

d De stochastische grootheid $-T$ is Erlang verdeeld met parameters n en λ . De verwachting van de m.a.s. $\hat{\lambda}$ is

$$\int_0^\infty \frac{n}{t} \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} \lambda e^{-\lambda t} dt = \int_0^\infty \frac{n}{n-1} \lambda \frac{(\lambda t)^{n-2}}{(n-2)!} \lambda e^{-\lambda t} dt = \frac{n}{n-1} \lambda.$$

De schatter is niet zuiver, zeker niet UMVZ. NB: $(1-n)/\sum \log X_i$ is de UMVZ-schatter voor λ .

3. a De verdelingsfunctie is $F(x; \lambda) = \exp[-\lambda x^{-2}]$, waar $x > 0$. Ter bepaling van een betrouwbaarheidsinterval merken we op dat

$$-2 \sum_{i=1}^n \log F(X_i; \lambda) = 2\lambda \sum_{i=1}^n X_i^{-2} \sim \chi_{2n}^2.$$

Een 90% b.i. voor λ is

$$\left(\frac{\chi_{2n;0,05}^2}{2 \sum_{i=1}^n X_i^{-2}}, \frac{\chi_{2n;0,95}^2}{2 \sum_{i=1}^n X_i^{-2}} \right).$$

b Men kan het 90% b.i. interpreteren als de verzameling van bij toetsing met onbetrouwbaarheidsdrempel 0,1 niet verworpen waarden λ_0 voor de enkelvoudige nulhypothese $H_0 : \lambda = \lambda_0$ tegen het alternatief $\lambda \neq \lambda_0$. Gebruik als toetsingsgrootheid $T = 2 \sum_{i=1}^n X_i^{-2}$ en verwerp de nulhypothese wanneer $T < \frac{\chi_{2n;0,05}^2}{\lambda_0}$ of $T > \frac{\chi_{2n;0,95}^2}{\lambda_0}$.

4. a Zie boek.

b Omdat $f(x; \lambda) = e^{-\lambda} \lambda^x / x!$ voor niet-negatieve geheeltallige x , is $f(x; 3)/f(x; 1) = e^{-2} 3^x$. Het Neyman-Pearsonlemma zegt dat men moet verwerpen voor grote waarden, dus voor grote waarden van x met randomisatie. Nu is $\mathbb{P}_1\{X > 3\} \approx 0,02$ en $\mathbb{P}\{X > 2\} \approx 0,08$. Derhalve wordt verworpen voor $X > 3$ en met kans $\tau = (0,05 - \mathbb{P}_1\{X > 3\})/\mathbb{P}_1\{X = 3\} \approx 0,51$ als $X = 3$.

c Schrijf $\delta(X)$ voor de toets in [b]. Merk op dat we dezelfde meest onderscheidende toets krijgen voor elk alternatief $\lambda > 1$. Verder is de afgeleide naar λ van $\mathbb{E}_\lambda \delta(X)$ is $e^{-\lambda} \left(\frac{\tau \lambda^2}{2} + \frac{(1-\tau)\lambda^3}{6} \right)$ dus positief. Dus $\sup_{\lambda \leq 1} \mathbb{E}_\lambda \delta(X) = \mathbb{E}_1 \delta(X) = 0,05$. De toets is uniform meest onderscheidend.

d De likelihood ratio is $f(X; 1)/f(X; \hat{\lambda}) = \exp[-1 + X(1 - \log X)]$, waar $\hat{\lambda} = X$ de meest aannemelijke schatter is. We verwerpen voor kleine waarden van $X(1 - \log X)$, dat wil zeggen voor grote waarden van X aangevuld met 0 en randomisatie op de rand.