

Tentamen **Mathematische Statistiek (2WS05)**,  
dinsdag 3 november 2009, van 14.00–17.00 uur.

Dit is een tentamen met gesloten boek. De uitwerkingen van de opgaven dienen duidelijk en overzichtelijk te worden opgeschreven. Elk onderdeel levert 10 punten op. Het cijfer is het totaal van de behaalde punten gedeeld door 12, afgerond op een geheel getal.

Op elk ingeleverd vel de naam van de student, de code van het college en de datum van het tentamen noteren.

U mag gebruik maken van een onbeschreven Statistisch Compendium en een (grafische) rekenmachine.

---

1. Zij  $X_1, \dots, X_n$  een aselechte steekproef uit een absoluut continue verdeling op  $\mathbb{R}^+$  met kansdichtheid

$$f(x; \lambda) = \frac{1}{2} \lambda^3 x^2 e^{-\lambda x}$$

voor  $\lambda > 0$ .

- a** Bepaal een momentenschatting voor  $\lambda$ . Is deze schatting zuiver? Motiveer uw antwoord.  
**b** Bewijs dat er een meest aannemelijke schatting voor  $\lambda$  bestaat en bepaal deze schatting. Wat is de asymptotische variantie van deze schatting voor  $n \rightarrow \infty$ ?  
**c** Vormt de familie  $\{f(x; \lambda) : \lambda > 0\}$  van kansdichtheden een exponentiële familie? Motiveer uw antwoord.  
**d** Bepaal een UMVZ-schatting voor  $\lambda$ .
2. Een tentamen wiskunde wordt, onafhankelijk van elkaar, door twee correctoren nagekeken. Er nemen tien studenten aan het tentamen deel, met de volgende resultaten.

student	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
eerste corrector	4,2	5,3	5,7	9,1	6,7	6,3	5,8	5,7	1,8	7,7
tweede corrector	4,1	5,2	5,0	8,6	6,5	6,2	5,0	5,0	1,4	7,5

Het faculteitsbestuur wil nagaan of het uitmaakt wie van de beide correctoren de tentamen nakijkt.

- a** Construeer een geschikte toets bij onbetrouwbaarheidsdrempel  $\alpha = 0,05$ . Welke conclusie mag het faculteitsbestuur trekken? Welke veronderstellingen zijn gemaakt?  
**b** Construeer een 95% betrouwbaarheidsinterval voor het verwachte verschil in cijfer behaald bij elk der correctoren. Welke modelaannamen hebt u gemaakt?

3. Beschouw het volgende R-script.

```
stochast <- function(k, s)
{
  y <- runif(k)
  x <- - log(y)
  return( s * x )
}
```

- a Beschrijf de werking van de functie ‘stochast’. Weet u een gemakkelijker manier om hetzelfde effect te bereiken?
  - b Bewijs dat als de absoluut continu verdeelde stochast  $X$  verdelingsfunctie  $F$  heeft,  $F(X)$  homogeen verdeeld is.
  - c Schrijf (met behulp van [b]) een R-functie die een steekproef uit de Paretoverdeling genereert.
4. Zij  $X_1, \dots, X_{20}$  een aselechte steekproef uit een Bernoulliverdeling met succeskans  $p \in [0, 1]$ .
- a Laat zien dat de meest aannemelijke schatter voor  $p$  bestaat en bepaal deze schatter.
  - b Beschrijf de likelihood ratio toets voor de nulhypothese  $p_0 = 1/2$  tegen het alternatief  $p \neq 1/2$ .  
Wat is uw conclusie als er eerst acht successen worden waargenomen en vervolgens twaalf mislukkingen? Werk bij onbetrouwbaarheidsdrempel 0,05.
  - c Is de in [b] beschreven toets uniform meest onderscheidend? Motiveer uw antwoord.

*Succes!*

1. **a** Merk op dat de gegeven dichtheid een dichtheid van de Erlang(3,  $\lambda$ )-verdeling is, die verwachting  $3/\lambda$  heeft. Er volgt  $\hat{\lambda} = 3/\bar{X}$ . (Direct te berekenen met behulp van partiële integratie). De som  $\sum_{i=1}^n X_i$  heeft een Erlang( $3n$ ,  $\lambda$ )-verdeling, zodat

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[ \frac{3n}{\sum_{i=1}^n X_i} \right] &= \int_0^\infty \frac{1}{(3n-1)!} \frac{3n}{x} \lambda^{3n} x^{3n-1} e^{-\lambda x} dx = \\ &= \int_0^\infty \frac{3n\lambda}{3n-1} \frac{1}{(3n-2)!} \lambda^{3n-1} x^{3n-2} e^{-\lambda x} dx = \frac{3n\lambda}{3n-1}. \end{aligned}$$

De schatter is niet zuiver.

- b** De log aannemelijkheidsfunctie is

$$\log f(X_1, \dots, X_n; \lambda) = -n \log 2 + 3n \log \lambda + 2 \sum_{i=1}^n \log X_i - \lambda \sum_{i=1}^n X_i.$$

De afgeleide is  $-\sum_{i=1}^n X_i + 3n/\lambda$  met uniek nulpunt  $\hat{\lambda} = 3/\bar{X}$ . Dit correspondeert met een uniek maximum omdat de tweede afgeleide  $-3n/\lambda^2$  strikt negatief is.

Voor de asymptotische variantie lezen we uit bovenstaande tweede afgeleide de Fisherinformatie  $I_1(\lambda) = -\mathbb{E}[-3/\lambda^2] = 3/\lambda^2$  af. De asymptotische variantie is  $1/(nI_1(\lambda)) = \lambda^2/(3n)$ .

- c** Ja: een 1-parameter exponentiële familie met  $Q(\lambda) = -\lambda$  en afdoende statistische grootheid  $T(X) = X$ .
- d** De steekproef vormt een 1-parameter exponentiële familie met  $Q(\lambda) = -\lambda$  en afdoende statistische grootheid  $\sum_{i=1}^n X_i$ . De verzameling  $\{Q(\lambda) : \lambda > 0\} = \mathbb{R}^-$  bevat (bijvoorbeeld) het interval  $(-20, -10)$ . Derhalve bestaat er ten hoogste één zuivere schatter gebaseerd op  $\sum_{i=1}^n X_i$ . Op grond van onderdeel [a] moet dit  $(3n-1)/\sum_{i=1}^n X_i$  zijn. Deze schatter kan niet verbeterd worden (Rao-Blackwell) en is dus UMVZ.

2. **a** Gebruik de tweezijdige t-toets voor gepaarde waarnemingen. Zij  $X_i$  het door corrector 1 aan student  $i$  gegeven cijfer,  $Y_i$  het cijfer gegeven door corrector 2. Veronderstel dat de  $Z_i := X_i - Y_i$ ,  $i = 1, \dots, 10$  onafhankelijk en normaal verdeeld zijn met verwachting  $\Delta$  en onbekende variantie  $\sigma^2$ . Toets  $\Delta = 0$  tegen het alternatief  $\Delta \neq 0$  met toetsingsgrootheid  $T = \sqrt{10}\bar{Z}/S_Z \approx 4,3$ . Verwerp als  $|T| \geq t_{9;0,975} \approx 2,26$ . Voor de gegeven waarnemingen wordt de nulhypothese verworpen (er is verschil tussen de correctoren).
- b** Construeer uit [a] een betrouwbaarheidsinterval dat bestaat uit alle bij toetsing niet verworpen waarden:

$$\left( \bar{Z} - \frac{S_Z}{\sqrt{10}} t_{9;0,975}, \bar{Z} + \frac{S_Z}{\sqrt{10}} t_{9;0,975} \right).$$

Vul tenslotte  $\bar{Z} \approx 0,38$  en  $S_Z^2 \approx 0,077$  in.

3. **a** Het script genereert een steekproef ter grootte  $k$  uit een exponentiële verdeling met verwachting  $s$ , althans voor  $s > 0$ . De opdracht `rexp(k, 1/s)` doet hetzelfde. Om de bewering te verifiëren, merken we op dat voor  $x > 0$ ,

$$\mathbb{P}(-s \log Y \geq x) = \mathbb{P}(Y \leq e^{-x/s}) = e^{-x/s}.$$

b Omdat  $X$  absoluut continu verdeeld is, is  $F$  bijectief dus inverteerbaar. Verder is

$$\mathbb{P}(F(X) \leq u) = \mathbb{P}(X \leq F^{-1}(u)) = F(F^{-1}(u)) = u$$

voor  $u \in (0, 1)$ , waaruit het beweerde volgt.

c De Pareto-verdeling heeft verdelingsfunctie  $F(x) = 1 - (1+x)^{-\kappa}$  voor  $x, \kappa > 0$ . De inverse is  $F^{-1}(y) = (1-y)^{-1/\kappa} - 1$ . Een script zou kunnen zijn:

```
rpareto <- function( n, kappa )
{
  u <- runif( n )
  x <- exp( - log(u) / kappa )
  return( x - 1 )
}
```

4. a De log aannemelijkheidsfunctie is voor  $p \in (0, 1)$

$$\log(p) \sum_{i=1}^n X_i + n \log(1-p) - \log(1-p) \sum_{i=1}^n X_i$$

voor  $p \in (0, 1)$ . De aannemelijkheidsvergelijking is

$$\frac{1}{p} \sum_{i=1}^n X_i + \frac{1}{1-p} \sum_{i=1}^n X_i - \frac{n}{1-p} = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n X_i - np = 0.$$

Er is een uniek nulpunt  $\hat{p} = \bar{X}$ . De tweede afgeleide,

$$\frac{-1}{p^2} \sum_{i=1}^n X_i + \frac{-(n - \sum_{i=1}^n X_i)}{(1-p)^2},$$

is strikt negatief. Bij de randen  $p = 0, 1$  convergeert de log aannemelijkheidsfunctie naar  $-\infty$ , behalve als  $\sum_i x_i \in \{0, n\}$ , en dus is  $\hat{p}$  de unieke meest aannemelijke schatter als niet alle uitkomsten gelijk zijn. Tenslotte de triviale gevallen  $\sum_i x_i = 0$  of  $n$  apart bekijken. Bijvoorbeeld voor  $\sum_i x_i = n$  is de log aannemelijkheidsfunctie  $n \log p$  met maximum bij  $\hat{p} = 1$ .

b De toetsingsgrootheid is

$$\lambda(X_1, \dots, X_n) = \frac{p_0^{\sum_{i=1}^n X_i} (1-p_0)^{n-\sum_{i=1}^n X_i}}{\hat{p}^{\sum_{i=1}^n X_i} (1-\hat{p})^{n-\sum_{i=1}^n X_i}} = \frac{2^{-n}}{\bar{X}^{n\bar{X}} (1-\bar{X})^{n(1-\bar{X})}}.$$

De nulhypothese wordt verworpen voor kleine waarden, dus voor grote waarden van  $\bar{X}^{n\bar{X}} (1-\bar{X})^{n(1-\bar{X})}$  oftewel voor grote waarden van  $T(\bar{X}) = \bar{X} \log \bar{X} + (1-\bar{X}) \log(1-\bar{X})$ . De functie  $T$  is symmetrisch met een globaal minimum  $T(1/2) = -\log 2$  en globale maxima  $T(0) = T(1) = 0$ . Op basis van deze overwegingen verwerpen we de nulhypothese als  $\sum_{i=1}^n X_i \in \{0, 1, \dots, c_\alpha\} \cup \{n - c_\alpha, n - c_\alpha + 1, \dots, n\}$  waar  $c_\alpha$  zodanig wordt gekozen dat

$$2\mathbb{P}_{1/2} \left( \sum_{i=1}^n X_i \leq c_\alpha \right) \leq \alpha$$

met randomisatie op de rand om de onbetrouwbaarheid  $\alpha$  vol te maken. Voor  $n = 20$  en  $\alpha = 0,05$  vinden we  $c_\alpha = 5$ , met onbetrouwbaarheid  $0,0413$ . Bij zes of veertien successen wordt de nulhypothese met kans  $(0,025 - 0,021)/0,037 \approx 0,12$  (elk) verworpen. Conclusie: bij acht successen mag de nulhypothese niet worden verworpen.

- c De tweezijdige toets is (meestal) niet uniform meest onderscheidend. Voor  $p > 1/2$  zal een toets met een kritiek gebied van de vorm  $\{c'_\alpha, \dots, n\}$  voor de meeste  $\alpha$  een hoger onderscheidingsvermogen hebben.