Technische Universiteit Eindhoven
Faculteit Wiskunde en Informatica

Tentamen **Mathematische Statistiek (2WS05)**,
vrijdag 29 oktober 2010, van 14.00–17.00 uur.

Dit is een tentamen met gesloten boek. De uitwerkingen van de opgaven dienen duidelijk en overzichtelijk te worden opgeschreven. Elk onderdeel levert 10 punten op. Het cijfer is het totaal van de behaalde punten gedeeld door 13, afgerond op een geheel getal.

Op elk ingeleverd vel de naam van de student, de code van het college en de datum van het tentamen noteren.

U mag gebruik maken van een onbeschreven Statistisch Compendium en een (grafische) rekenmachine.

---

1. Zij $X_1, \ldots, X_n$, $n \in \{2, 3, \ldots\}$, een aselecte steekproef uit een absoluut continue verdeling met een kansdichtheid
$$f(x; \lambda) = 2\lambda x e^{-\lambda x^2}$$
voor $x > 0$ en 0 elders, die afhangt van een parameter $\lambda > 0$.

   a Bewijs dat er een meest aannemelijke schatter $\hat{\lambda}$ van λ bestaat en bepaal deze schatter.

   b Laat zien dat $\mathbb{E}X_1 < \infty$ en bepaal de momentenschatter van λ.

   c Bepaal de Cramèr–Rao-ondergrens voor de variantie van zuivere schatters van λ.

   d Bestaat er een UMVZ-schatter van λ? Zo ja, bepaal deze schatter. Zo nee, waarom niet?

   e Wat is de asymptotische variantie van de schatter uit [**a**]? Prefereert u deze schatter boven de momentenschatter? Motiveer uw antwoord.

2. Een jongetje koopt vijftien zakjes chips met in elk zakje een kraslot. Hij vindt drie prijzen.

   a Bepaal een exact betrouwbaarheidsinterval voor de kans p op een prijs met onbetrouwbaarheid $0,05$.

   b Gebruik de centrale limietstelling om een benaderd betrouwbaarheidsinterval voor de prijskans p op te stellen met onbetrouwbaarheid $0,05$.

   c Men wil de nulhypothese $p = 1/5$ toetsen tegen het alternatief $p \neq 1/5$ bij onbetrouwbaarheidsdrempel $0,05$. Wordt de nulhypothese verworpen?

3. Zij $X_1, \ldots, X_n$, $n \in \mathbb{N}$, een aselecte steekproef uit een normale verdeling met $\mathbb{E}X_1 = \mu$ en $\operatorname{Var} X_1 = \sigma^2$. Beschouw de nulhypothese $\sigma^2 = 1$ bij onbetrouwbaarheidsdrempel $\alpha \in (0, 1)$.

   a Onderstel dat $\mu = 0$ bekend is. Men wil de nulhypothese toetsen tegen het alternatief $\sigma^2 = 2$. Stel een meest onderscheidende toets op.

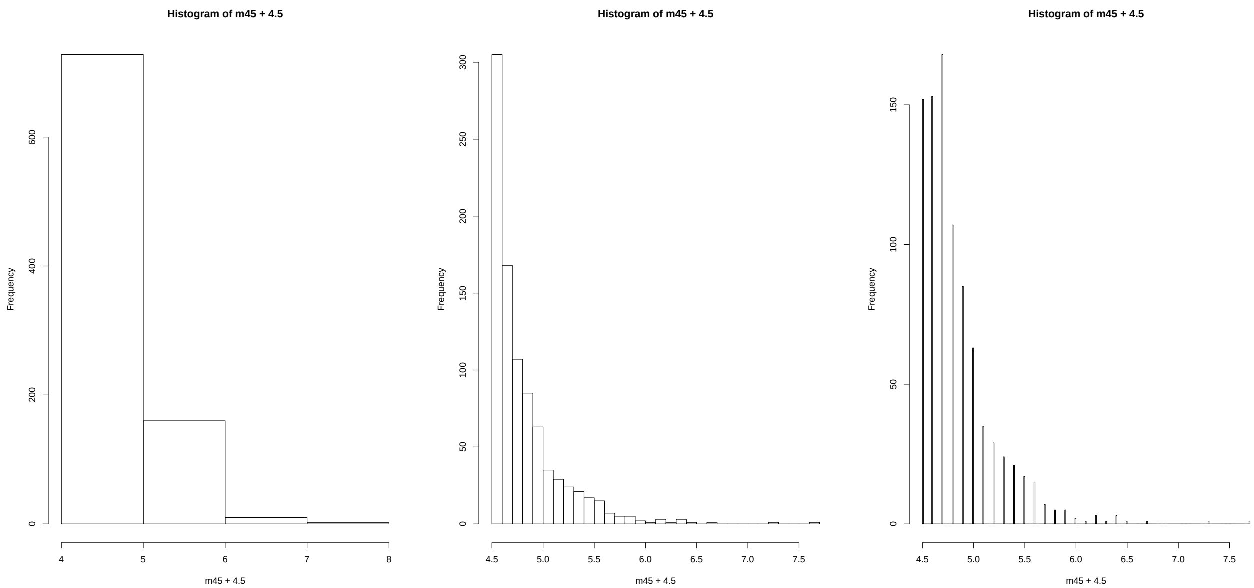
   b Is de in [**a**] bepaalde toets uniform meest onderscheidend tegen de alternatieve hypothese $\sigma^2 > 1$? En tegen het alternatief $\sigma^2 \neq 1$? (In beide gevallen $\mu = 0$ bekend). Motiveer uw antwoorden.

c Neem nu aan dat μ onbekend is. Men wil de samengestelde nulhypothese $\sigma^2 = 1$ toetsen tegen het alternatief $\sigma^2 \neq 1$. Laat zien dat de likelihood ratiotoets de nulhypothese verwerpt als

$$\sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X}_n)^2 \notin [c_1, c_2]$$

waar c_1 en c_2 voldoen aan $\mathbb{P}(\chi^2_{n-1} \notin [c_1, c_2]) = \alpha$ en $c_1 - c_2 = n \log(c_1/c_2)$. U mag de meest aannemelijke schatters voor de parameters van een normale verdeling bekend veronderstellen.

4. De plaatjes tonen drie histogrammen van de kracht op de schaal van Richter van 900 aardbevingen in Pakistan gedurende de periode 1973–2008. Bevingen lichter dan $4,5$ zijn buiten beschouwing gelaten omdat die niet allemaal worden gevoeld.



a Welke histogram geniet uw voorkeur en waarom?

b Welk kansmodel (uitkomstenruimte en kansmaat) zou u op basis van bovenstaande histogrammen voorstellen? Welke R-functies kunt u gebruiken om na te gaan of uw voorstel past bij de data?

Succes!

1. **a** De simultane kansdichtheid is

$$f(x_1, \dots, x_n; \lambda) = 2^n \lambda^n \prod_{i=1}^n [x_i 1\{x_i > 0\}] \exp\left[-\lambda \sum_{i=1}^n x_i^2\right].$$

De aannemelijkheidsfunctie is

$$L(x_1, \dots, x_n; \lambda) = n \log 2 + n \log \lambda + \sum_{i=1}^n \log x_i - \lambda \sum_{i=1}^n x_i^2.$$

De afgeleide van $L(x_1, \dots, x_n; \lambda)$ naar λ is $-\sum_i x_i^2 + n/\lambda$ en heeft een uniek nulpunt $\lambda = n(\sum_i x_i^2)^{-1}$. De tweede afgeleide is $-n\lambda^{-2}$ is strikt negatief, zodat er een unieke meest aannemelijke schatter $\hat{\lambda} = n / \sum_i X_i^2$ bestaat.

b De kansdichtheid is die van een Weibullverdeling met verwachting $\mathbb{E}X_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}$. Om de momentenschatter te bepalen, losse men op $\bar{X}_n = \mathbb{E}X_1$ (naar λ) en vindt $\tilde{\lambda} = \pi/(4\bar{X}_n^2)$.

c De Fisher-informatie in 1 waarneming is

$$I_1(\lambda) = -\frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} L(x_1, \dots, x_n; \lambda) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

De ondergrens wordt dus λ^2/n.

d De collectie $\{f(x_1, \dots, x_n; \lambda) : \lambda > 0\}$ vormt een 1-parameter exponentiële familie met afdoende grootheid $\sum_i X_i^2$ en $Q(\lambda) = -\lambda$. De verzameling $\{Q(\lambda) : \lambda > 0\} = \mathbb{R}^-$ bevat een interval (bijvoorbeeld $(-3, -2)$) dus er bestaat ten hoogste één zuivere schatter gebaseerd op de afdoende grootheid. Uit [**a**] weten we dat de meest aannemelijke schatter gebaseerd is op $\sum_i X_i^2$. Om te zien of deze schatter al dan niet zuiver is, eerst de verdeling van X_1^2 bepalen. Aldus: voor $k \geq 0$ is

$$\mathbb{P}(X_1 \geq k) = \int_k^\infty 2\lambda x e^{-\lambda x^2} dx = e^{-\lambda k^2}$$

en dus

$$\mathbb{P}(X_1^2 \geq k) = \mathbb{P}(X_1 \geq \sqrt{k}) = e^{-\lambda k}.$$

Ergo: X_1^2 is exponentieel verdeeld en $\sum_{i=1}^n X_i^2$ Erlang met parameters n en λ. Voor $n > 1$ is de verwachting van $1/\sum_i X_i^2$ gelijk aan $\lambda/(n-1)$. Conclusie: $(n-1)/\sum_{i=1}^n X_i^2$ is UMVZ.

e De asymptotische variantie is $(nI_1(\lambda))^{-1} = \lambda^2/n$. Op een constante die naar 1 convergeert na is de meest aannemelijke schatter gelijk aan de UMVZ-schatter en dus te prefereren boven de momentenschatter.

2. **a** Merk op dat een betrouwbaarheidsinterval voor p bestaat uit de verzameling van alle bij toetsing tegen een tweezijdig alternatief niet verworpen waarden. Bekijk dus de binomiale toets met toetsingsgrootheid X het aantal gevonden prijzen. Dan ziet men dat het stelsel vergelijkingen

$$\mathbb{P}_{p_l}(X \geq 3) = 0,025;$$
$$\mathbb{P}_{p_r}(X \leq 3) = 0,025;$$

moet worden opgelost naar p_l en p_r. X is binomiaal verdeeld met $n = 15$. Dit geeft een betrouwbaarheidsinterval $(p_l, p_r) = (0,044, 0,48)$.

b Gebruik een normale benadering met continuïteitscorrectie:

$$\mathbb{P}_{p_l}(X \geq 3) = \mathbb{P}_{p_l}(X \geq 2,5) = 1 - \mathbb{P}_{p_l}(X \geq 2,5) \approx 1 - \Phi\left(\frac{2,5 - 15p_l}{\sqrt{15p_l(1-p_l)}}\right) = 0,025$$

en

$$\mathbb{P}_{p_r}(X \leq 3) = \mathbb{P}_{p_r}(X \leq 3,5) \approx \Phi\left(\frac{3,5 - 15p_r}{\sqrt{15p_r(1-p_r)}}\right) = 0,025$$

Oplossen naar p_l en p_r geeft een betrouwbaarheidsinterval $(p_l, p_r) = (0,053, 0,486)$. NB: Het compendium geeft een alternatief interval.

c Het punt $0,2$ ligt in de bij [**a**]–[**b**] gevonden intervallen dus de nulhypothese wordt niet verworpen.

3. **a** De Neyman–Pearsontoets

$$\delta(X) = \begin{cases} 1 & \text{als } f_1(X) \geq c f_0(X) \\ 0 & \text{als } f_1(X) < c f_0(X) \end{cases}$$

waar $X = (X_1, \ldots, X_n)$, is meest onderscheidend. Nu is

$$\begin{aligned} f_1(X) &= (2\sqrt{\pi})^{-n} \exp\left[-\sum_{i=1}^{n} X_i^2/4\right]; \\ f_0(X) &= (\sqrt{2\pi})^{-n} \exp\left[-\sum_{i=1}^{n} X_i^2/2\right]. \end{aligned}$$

De toets verwerpt dus voor grote waarden van $T := \sum_{i=1}^{n} X_i^2$. Onder de nulhypothese is $T \sim \chi_n^2$ verdeeld. De toets verwerpt dus voor T tenminste gelijk aan $\chi^2_{n;1-\alpha}$.

b Wanneer men de alternatieve hypothese vervangt door $\sigma^2 = \sigma_1^2$ voor willekeurige $\sigma_1^2 > 1$ verkrijgt men dezelfde meest onderscheidende toets. De in [**a**] bepaalde toets is dus uniform meest onderscheidend tegen de alternatieve hypothese $\sigma^2 > 1$. (Alternatief: merk op dat de familie verdelingen een 1-parameter exponentiële familie is met afdoende grootheid T en $Q(\sigma^2) = -(2\sigma^2)^{-1}$ strikt stijgend).

De toets is niet uniform meest onderscheidend tegen het tweezijdige alternatief omdat het onderscheidingsvermogen voor alternatieven kleiner dan 1 slecht is (de toets die verwerpt voor kleine waarden van T is hier beter).

c Hier is $\Theta_0 = \{(\mu, 1) : \mu \in \mathbb{R}\}$ en $\Theta = \mathbb{R} \times R^+$. Herinner je: $\hat{\mu} = \bar{X}$; $\hat{\sigma^2} = \sum_i (X_i - \bar{X})^2/n$. Dus

$$\begin{aligned} \sup\{f(X_1, \ldots, X_n; \theta) : \theta \in \Theta\} &= (2\pi\hat{\sigma^2})^{-n/2} e^{-n/2}; \\ \sup\{f(X_1, \ldots, X_n; \theta) : \theta \in \Theta_0\} &= (2\pi)^{-n/2} \sup\{e^{-\sum_i (X_i - \mu)^2/2} : \mu \in \mathbb{R}\} = (2\pi)^{-n/2} e^{-n\hat{\sigma^2}/2}. \end{aligned}$$

De likelihood ratiostatistiek is

$$\lambda(X) = (\hat{\sigma^2})^{n/2} \exp\left[\frac{n}{2} - \frac{n}{2}\hat{\sigma^2}\right].$$

Ga over op de logaritme om te zien dat de toets verwerpt voor kleine waarden van

$$\log \lambda(X) = \frac{n}{2}\left[\log \hat{\sigma^2} - \hat{\sigma^2} + 1\right].$$

De afgeleide heeft een uniek nulpunt in $\sigma^2 = 1$, is positief voor kleinere σ^2, negatief voor grotere waarden van σ^2. Derhalve verkrijgt men de toetsingsfunctie

$$\delta(X) = \begin{cases} 1 & \text{als } \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \notin [c_1, c_2] \\ 0 & \text{elders} \end{cases}$$

Kijk om c_1, c_2 te bepalen naar de onbetrouwbaarheid

$$\mathbb{E}_{\sigma^2=1}\delta(X) = \mathbb{P}(\chi^2_{n-1} \notin [c_1, c_2]) = \alpha.$$

Neem een symmetrisch kritiek gebied. In dat geval geldt

$$\frac{n}{2}\left[\log \frac{c_1}{n} - \frac{c_1}{n} + 1\right] = \frac{n}{2}\left[\log \frac{c_2}{n} - \frac{c_2}{n} + 1\right]$$

zodat $n \log(c_1/c_2) = c_1 - c_2$.

4. **a** Ik prefereer het middelste plaatje: het rechter plaatje geeft alleen de data, in het linker plaatje zijn de intervallen zo groot dat er geen structuur meer te herkennen valt.

   b Een verschoven exponentiële verdeling met uitkomstenruimte $[4, 5, \infty)$. Gebruik (bijvoorbeeld) het volgende script, ervanuitgaande dat `h45` het getoonde histogram is:

```
d45 <- dexp( c(0, h45$mids, rate=1/mean(m45) )
plot( h45$mids + 4.5, h45$density )
lines( c(4.5, h45$mids + 4.5), d45 )
```