**Technische Universiteit Eindhoven**
Faculteit Wiskunde en Informatica

Tentamen **Kansrekening (2WS13)**,
Tussentoets **Kansrekening en Statistiek (2WS04)**,
maandag 27 april 2009, van 14.00–17.00 uur.

Dit is een tentamen met gesloten boek. De uitwerkingen van de opgaven dienen duidelijk en overzichtelijk te worden opgeschreven. Elk onderdeel levert 10 punten op. Het cijfer is het totaal van de behaalde punten gedeeld door 14, afgerond op een geheel getal.

Op elk ingeleverd vel de naam van de student, de code van het college en de datum van het tentamen noteren.

U mag gebruik maken van een onbeschreven Statistisch Compendium en een (grafische) rekenmachine.

---

1. Een student heeft zes boeken op zijn kamer: drie romans, een natuurkundeboek, en twee wiskundeboeken.

   **a** Op hoeveel manieren kan de student zijn boeken op een plank neerzetten? En op hoeveel manieren als hij de romans bij elkaar wil houden zonder restricties op te leggen aan de plaatsing van de overige boeken?

   **b** Een bezoeker kiest op goed geluk twee boeken uit om te lenen. Zij $X$ het aantal romans, $Y$ het aantal natuurkundeboeken, en $Z$ het aantal wiskundeboeken. Bepaal de simultane kansdichtheid van de stochastische vector $(X, Y, Z)$.

   **c** Met $X, Y$ en $Z$ als onder [b], bereken $\mathrm{Cov}(X, Y)$, $\mathrm{Cov}(Y, Z)$ en $\mathrm{Cov}(X, Z)$.

2. Beschouw onafhankelijke experimenten met kans $p \in (0, 1)$ op succes en kans $1-p$ op mislukking. Definieer de stochastische variabelen $X$ en $Y$ als volgt: $X$ is het aantal mislukkingen vóórdat het eerste succes optreedt, en $Y$ is de lengte van de eerste ononderbroken rij successen.

   **a** Bepaal de simultane kansdichtheid van $(X, Y)$.

   **b** Bereken de marginale verdelingsfuncties van $X$ en $Y$.

   **c** Zijn $X$ en $Y$ onafhankelijk? Motiveer uw antwoord.

   **d** Neem nu $p = 1/2$. Wat is de verwachting van de som $S = X + Y$?
   En de voorwaardelijke verwachting van $X$ gegeven dat $S = s$, waar $s \in \mathbb{N}$?

3. De functie $f$ is gedefinieerd als

$$f(x;\lambda) = \frac{2\,\lambda}{x^3}\,\exp\left[\frac{-\lambda}{x^2}\right]$$

voor $x \in \mathbb{R}^+$ en parameter $\lambda > 0$.

**a** Laat zien dat $f(x;\lambda)$ als functie van $x \in \mathbb{R}^+$ voor elke $\lambda > 0$ een kansdichtheid is.

**b** Bepaal de verdelingsfunctie van $X$.
Voor welke waarde van $\lambda$ is de mediaan van $X$ gelijk aan 1?

**c** Wat is de schaalparameter van de familie kansdichtheden $f(x;\lambda)$, $\lambda > 0$?

**d** Bereken de verwachting $\mathbb{E}X$.

4. Geef een gemotiveerd antwoord op de volgende vragen.

**a** Zij $Z$ exponentieel verdeeld met parameter 1. Geef een kansdichtheid van $1/Z$.

**b** Zij $(X, Y)$ een stochastische vector met simultane kansdichtheid

$$f(x,y) = \begin{cases} c\,x^2\,y, & 0 < x < y < 1; \\ 0, & \text{elders.} \end{cases}$$

Wat is de waarde van $c$?

**c** Een kermisexploitant biedt het volgende spel aan. Men mag met teruglegging blindelings vijf ballen trekken uit een bak met gele, groene en rode ballen. Elke gele bal is 5 euro waard, een groene bal 1 euro en voor een rode bal moet 1 euro worden afgegeven. De bak bevat 70 rode ballen, 20 groene en 10 gele. Kermisbezoekers betalen 2 euro om het spel te mogen spelen. Stel een kansmodel op voor het aldus beschreven spel. Verdient de kermisexploitant op de lange duur aan dit spel?

*Succes!*

# Antwoorden

1. **a** Er zijn 6! permutaties van de boeken. Omdat er vier startposities zijn voor de romans, deze op 3! manieren onderling geordend kunnen zijn en de overige boeken ook op 3! manieren, zijn er $4(3!)^2 = 144$ arrangementen met alle romans bij elkaar.

   **b** De waardenverzameling van $X$ en $Z$ is $W_X = W_Z = \{0,1,2\}$, die van $Y$ is $W_Y = \{0,1\}$. Voor $x \in W_X$, $y \in W_Y$ en $z \in W_Z$ met $x+y+z=2$ is de simultane kansdichtheid

$$\frac{\binom{3}{x}\binom{1}{y}\binom{2}{z}}{\binom{6}{2}},$$

   cf. de gegeneraliseerd hypergeometrische verdeling.

   **c** Merk op dat $f_X(2) = 1/5$, $f_X(1) = 3/5$ en $f_X(0) = 1/5$. Dus $\mathbb{E}X = 1$. Verder is $f_Y(1) = 1/3 = \mathbb{E}Y$, en $f_{XY}(0) = 4/5$, $f_{XY}(1) = 1/5$. Dus $\mathrm{Cov}(X,Y) = 1/5 - 1/3 = -2/15$. Op analoge wijze vindt men $\mathrm{Cov}(X,Z) = 6/15 - 10/15 = -4/15$ en $\mathrm{Cov}(Y,Z) = 2/15 - 1/3 * 2/3 = -4/45$.

2. **a** De waardenverzamelingen zijn $\mathbb{N}_0$ voor $X$ en $\mathbb{N}$ voor $Y$. Voor $x = 0,1,\ldots$ en $y = 1,2,\ldots$, is $f(x,y)$ de kans op achtereenvolgens $x$ mislukkingen, $y$ successen en een mislukking. Dus $f(x,y) = p^y(1-p)^{x+1}$.

   **b** Merk op dat $X+1$ geometrisch verdeeld is met parameter $p$. $X$ zelf is verschoven geometrish verdeeld met kansdichtheid $p(1-p)^x$ en verdelingsfunctie $F_X(x) = 1-(1-p)^{x+1}$. De kansdichtheid van $Y$ is

$$f_Y(y) = \sum_{x=0}^{\infty} f(x,y) = p^y \sum_{x=0}^{\infty}(1-p)^{x+1} = p^y\,(1-p)\,p^{-1} = (1-p)\,p^{y-1},$$

   zodat $Y$ geometrisch verdeeld is met parameter $1-p$ en $F_Y(y) = 1-p^y$.

   **c** Ja, immers $f(x,y) = f_X(x)\,f_Y(y)$ voor alle $x \in N_0$ en alle $y \in N$.

   **d** Merk op dat $\mathbb{E}S = \mathbb{E}X + 1 + \mathbb{E}Y - 1$. Met behulp van [b] vinden we $\mathbb{E}S = \frac{1}{p} + \frac{1}{1-p} - 1 = 3$. Met betrekking tot de voorwaardelijke verdeling merken we op dat wanneer $S = s$, $X$ de waarden $x = 0,1,\ldots,s-1$ kan aannemen. Voor zulk een $x$ is

$$\mathbb{P}\{X = x|S = s\} = \frac{\mathbb{P}\{X = x; Y = s-x\}}{\mathbb{P}\{S = s\}}.$$

   Omdat

$$\mathbb{P}\{S = s\} = \sum_{x=0}^{s-1} f(x, s-x) = \sum_{x=0}^{s-1} p^{s-x}\,(1-p)^{x+1} = s(1/2)^{s+1}$$

   is $\mathbb{P}\{X = x|S = s\} = 1/s$, zodat $X$ gegeven $S = s$ discreet uniform is verdeeld en $\mathbb{E}\,[X \mid S = s] = (s-1)/2$.

3. **a** Duidelijk is dat $f(x;\lambda) \geq 0$. Met de substitutie $y = x^{-2}$ is ook duidelijk dat

$$\int_0^{\infty} f(x;\lambda)\,dx = \int_0^{\infty} \frac{2\lambda}{x^3}\,e^{-\lambda x^{-2}}\,dx = \int_0^{\infty} \lambda\,e^{-\lambda y}\,dy = 1.$$

**b** De verdelingsfunctie is

$$F(x;\lambda) = \int_0^x f(y;\lambda)\,dy = \exp\left[-\lambda x^{-2}\right]$$

voor $x > 0$. Voor $x \leq 0$ is $F(x;\lambda) = 0$. De mediaan $m$ is de oplossing van $F(m;\lambda) = \exp\left[-\lambda m^{-2}\right] = 1/2$. Dus $m = (\lambda/\log(2))^{1/2}$. Voor $\lambda = \log(2)$ is de mediaan gelijk aan 1.

**c** Zij $F_0(x) = F(x;1)$. Dan is $F(x;\lambda) = F_0(x/\sqrt{\lambda})$ voor alle $x \in \mathbb{R}$ en dus is $\sqrt{\lambda}$ een schaalparameter.

**d** Aangezien $\sqrt{\lambda}$ een schaalparameter is, bezien we eerst het geval $\lambda = 1$. Dan is met de substitutie $y = x^{-2}$,

$$\int_0^\infty x\,\frac{2}{x^3}\,e^{-x^{-2}}\,dx = \int_0^\infty y^{-1/2}\,e^{-y}\,dy = \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}.$$

Tenslotte merke men op dat $\mathbb{E}X = \sqrt{\lambda\pi}$.

4. **a** De waardenverzameling van $Z$ is $\mathbb{R}^+$ dus ook van $1/Z$. Voor $z > 0$ is

$$\mathbb{P}\{\frac{1}{Z} \leq z\} = \mathbb{P}\{Z \geq \frac{1}{z}\} = e^{-1/z}.$$

Differentiëren geeft kansdichtheid $f(z) = \frac{1}{z^2}\,e^{-1/z}$.

**b** Een dichtheid integreert tot 1. Omdat $\int_0^1 \int_x^1 x^2\,y\,dx\,dy = 1/15$ is $c = 15$.

**c** De vector $(X_1, X_2)$ met $X_1$ het aantal gele en $X_2$ het aantal groene ballen in de trekking is multinomiaal verdeeld met $k = 2$, $p_1 = 1/10$ en $p_2 = 2/10 = 1/5$. De marginale verdelingen zijn binomiaal. Per spel is de verwachte opbrengst $\frac{25}{10} + \frac{10}{10} - \frac{35}{10} = 0$. Om te mogen spelen wordt betaald, dus uiteindelijk verdient de kermisexploitant. Gebruik hier de interpretatie van de kans (en verwachting) als relatieve frequenties.