

Tentamen **Kansrekening (2WS13)**,
Tussentoets **Kansrekening en Statistiek (2WS04)**,
woensdag 7 april 2010, van 09.00–12.00 uur.

Dit is een tentamen met gesloten boek. De uitwerkingen van de opgaven dienen duidelijk en overzichtelijk te worden opgeschreven. Elk onderdeel levert 10 punten op. Het cijfer is het totaal van de behaalde punten gedeeld door 13, afgerond op een geheel getal.

Op elk ingeleverd vel de naam van de student, de code van het college en de datum van het tentamen noteren.

U mag gebruik maken van een onbeschreven Statistisch Compendium en een (grafische) rekenmachine.

1. Bij een kaartspel voor vier spelers krijgt elk een hand van dertien kaarten uit een eerlijk geschud spel. We noemen een aas, heer, vrouw of boer een 'plaatje'.
 - a Geef een geschikt kansmodel (uitkomstenruimte en kansmaat).
 - b Wat is binnen het in [a] gegeven model de kans dat elke speler precies vier plaatjes krijgt? Motiveer uw antwoord.
 - c Wat is binnen het in [a] gegeven model de kans dat tenminste één van de spelers geen enkel plaatje krijgt? Motiveer uw antwoord.

2. Bezie de functie

$$f(x) = \lambda x^{\lambda-1}$$

voor $x \in (0, 1)$ en $f(x) = 0$ voor $x \notin (0, 1)$.

- a Voor welke waarde(n) van λ is f een kansdichtheid? Motiveer uw antwoord.
- b Neem nu aan dat λ zodanig wordt gekozen dat f een kansdichtheid is (cf. [a]) en zij X een stochast met deze kansdichtheid. Bepaal de verdelingsfunctie van X .
- c Bepaal de verwachting en variantie van X .
- d Bewijs dat

$$\mathbb{P}(X < ab \mid X < a) = \mathbb{P}(X < b)$$

voor alle $a, b \in (0, 1)$.

3. Gooi twee maal met een zuivere dobbelsteen. Zij A de eventualiteit dat de som der ogen gelijk is aan 7, B de eventualiteit dat de eerste worp een 3 oplevert, en C de eventualiteit dat de tweede worp een 4 oplevert.
- a Zijn A , B en C paarsgewijs onafhankelijk? Motiveer uw antwoord.
 - b Zijn A , B en C onafhankelijk? Motiveer uw antwoord.
 - c Bereken $\mathbb{P}(B \mid A)$, $\mathbb{P}(C \mid A)$ en $\mathbb{P}(B \cap C \mid A)$.
4. Geef een gemotiveerd antwoord op de volgende vragen.
- a Zij X exponentieel verdeeld met parameter 1. Wat is de mediaan? Vergelijk uw antwoord met $\mathbb{E}X$.
 - b Geef een definitie van de begrippen locatie- en schaalparameter. Beschouw de kansdichtheid

$$f(x) = \frac{1}{4} \lambda^3 e^{-\lambda|x-\eta|} (x - \eta)^2$$

voor $x \in \mathbb{R}$. Heeft deze verdeling een locatie- en/of schaalparameter? Zo ja, welke?

- c Zij Y normaal verdeeld met verwachting 0 en variantie σ^2 . Geef met behulp van de ongelijkheid van Chebychev een afchatting van $\mathbb{P}(|Y| > 2\sigma)$ en vergelijk uw antwoord met de werkelijke waarde van deze kans.

Succes!

ANTWOORDEN

1. **a** Neem bijvoorbeeld als uitkomstenruimte S de familie van disjuncte partities A_i , $i = 1, \dots, 4$, van het pak kaarten waarbij elke A_i een verzameling van dertien verschillende kaarten is (de hand van speler i). Elk element $(A_1, \dots, A_4) \in S$ is even waarschijnlijk en heeft kans

$$\frac{1}{\binom{52}{13} \binom{39}{13} \binom{26}{13} \binom{13}{13}} = \frac{(13!)^4}{52!}.$$

- b** De kans dat de plaatjes rond zitten is

$$\frac{\binom{16}{4} \binom{36}{9} \binom{12}{4} \binom{27}{9} \binom{8}{4} \binom{18}{9} \binom{4}{4} \binom{9}{9}}{\binom{52}{13} \binom{39}{13} \binom{26}{13} \binom{13}{13}} = \frac{36! 16! (13!)^4}{(9! 4!)^4 52!},$$

ongeveer 2,5%.

- c** Zij E_i de eventualiteit dat speler $i \in \{1, \dots, 4\}$ geen enkel plaatje krijgt. Dan is

$$\mathbb{P}(E_i) = \frac{\binom{52-16}{13} \binom{39}{13} \binom{26}{13} \binom{13}{13}}{\binom{52}{13} \binom{39}{13} \binom{26}{13} \binom{13}{13}} = \frac{39! 36!}{52! 23!}.$$

Verder is voor $i \neq j$

$$\mathbb{P}(E_i \cap E_j) = \frac{\binom{36}{13} \binom{23}{13} \binom{26}{13} \binom{13}{13}}{\binom{52}{13} \binom{39}{13} \binom{26}{13} \binom{13}{13}} = \frac{36! 26!}{52! 10!}.$$

Er zijn hoogstens twee spelers die geen plaatjes krijgen. Met de inclusie-exclusieformule zien we dat de gevraagde kans gelijk is aan

$$\sum_i \mathbb{P}(E_i) - \sum_{i < j} \mathbb{P}(E_i \cap E_j) = 4 \frac{39! 36!}{52! 23!} - 6 \frac{36! 26!}{52! 10!},$$

ongeveer 1,5%.

2. **a** Voor een kansdichtheid f geldt: $f(x) \geq 0$ b.o. en $\int f(x) dx = 1$. Uit de eerste eis volgt dat $\lambda \geq 0$. Als $\lambda = 0$ is $\int f(x) dx = 0$. Voor $\lambda > 0$ is $\int_0^1 \lambda x^{\lambda-1} dx = [x^\lambda]_0^1 = 1$. Conclusie: $\lambda > 0$.

- b** Voor $x \in (0, 1)$ is

$$F_X(x) = \int_0^x \lambda y^{\lambda-1} dy = [y^\lambda]_0^x = x^\lambda,$$

Voor $x \leq 0$ is $F_X(x) = 0$ en voor $x \geq 1$ is $F_X(x) = 1$.

- c** De eerste twee momenten van X zijn:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= \int_0^1 x \lambda x^{\lambda-1} dx = \frac{\lambda}{\lambda+1}; \\ \mathbb{E}[X^2] &= \int_0^1 x^2 \lambda x^{\lambda-1} dx = \frac{\lambda}{\lambda+2}. \end{aligned}$$

Tenslotte is

$$\text{Var } X = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}X)^2 = \frac{\lambda}{\lambda+2} - \left(\frac{\lambda}{\lambda+1}\right)^2 = \frac{\lambda}{(\lambda+2)(\lambda+1)^2}.$$

d Met behulp van de definitie van voorwaardelijke kans en [b] zien we dat

$$\mathbb{P}(X < ab \mid X < a) = \frac{\mathbb{P}(X < ab; X < a)}{\mathbb{P}(X < a)} = \frac{\mathbb{P}(X < ab)}{\mathbb{P}(X < a)} = \frac{(ab)^\lambda}{a^\lambda} = b^\lambda = \mathbb{P}(X < b)$$

voor alle $a, b \in (0, 1)$.

3. a Het is duidelijk dat $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(C) = 1/6$ en $\mathbb{P}(B \cap C) = 1/36$. Dus B en C zijn onafhankelijk. Voor A kunt u een tabelletje maken en aflezen dat er zes paar ogen zijn met som zeven (1-6, 2-5, 3-4 of omgekeerd). Dus is $\mathbb{P}(A) = 6/36 = 1/6$. Verder is $A \cap B = B \cap C$ en $A \cap C = B \cap C$. Dus is $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B \cap C) = 1/36 = \mathbb{P}(A) \mathbb{P}(B)$. Evenzo $\mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(A) \mathbb{P}(C)$ zodat A, B, C paarsgewijs onafhankelijk zijn.
- b Merk op dat aangezien $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(B \cap C) = 1/36 \neq \mathbb{P}(A) \mathbb{P}(B) \mathbb{P}(C) = (1/6)^3$ de eventualiteiten niet onderling onafhankelijk zijn.
- c Uit [a] volgt dat $\mathbb{P}(B \mid A) = \mathbb{P}(B) = 1/6$. Ook $\mathbb{P}(C \mid A) = \mathbb{P}(C) = 1/6$. Merk op dat

$$\mathbb{P}(B \cap C \mid A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B \cap C)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{1/36}{1/6} = 1/6.$$

4. a We weten dat $\mathbb{E}X = 1$ en $F_X(x) = 1 - e^{-x}$ voor $x > 0$. Om de mediaan m te vinden, lossen we de volgende vergelijking op:

$$F_X(m) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow e^{-m} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow m = \log 2.$$

De mediaan is kleiner dan de verwachting. Er ligt dus meer kansmassa links van $\mathbb{E}X$ dan rechts; de exponentiële verdeling is niet symmetrisch en heeft een dunne staart.

- b Definities: zie boek. Hier is η de locatieparameter, $1/\lambda$ de schaalparameter.
- c De ongelijkheid van Chebychev geeft een bovengrens:

$$\mathbb{P}(|Y| > 2\sigma) \leq \frac{\sigma^2}{4\sigma^2} = \frac{1}{4}.$$

De werkelijke waarde van deze kans vinden we door te standaardiseren:

$$\mathbb{P}(|Y| > 2\sigma) = \mathbb{P}(Y < -2\sigma) + \mathbb{P}(Y > 2\sigma) = \mathbb{P}\left(\frac{Y}{\sigma} < -2\right) + \mathbb{P}\left(\frac{Y}{\sigma} > 2\right) = 2\Phi(-2).$$

De werkelijke waarde $2\Phi(-2) \approx 0,05 < 0,25$, de bovengrens.