Technische Universiteit Eindhoven
Faculteit Wiskunde en Informatica

Tentamen **Kansrekening (2WS13)**,
Tussentoets **Kansrekening en Statistiek (2WS04)**,
woensdag 23 april 2008, van 14.00–17.00 uur.

Dit is een tentamen met gesloten boek. De uitwerkingen van de opgaven dienen duidelijk en overzichtelijk te worden opgeschreven. Elk onderdeel levert 10 punten op. Het cijfer is het totaal van de behaalde punten gedeeld door 10, afgerond op een geheel getal.

Op elk ingeleverd vel de naam van de student, de code van het college en de datum van het tentamen noteren.

U mag gebruik maken van een onbeschreven Statistisch Compendium en een (grafische) rekenmachine.

---

1. De paashaas bezoekt een gezin met twee kinderen, een jongen en een meisje. Hij heeft een mandje met drie rode en drie groene eieren bij zich. De kinderen mogen om beurten (meisje eerst) blindelings een ei grabbelen totdat de mand leeg is.

   a Bereken de kans dat elk kind drie eieren van dezelfde kleur trekt.

   De gevraagde kans is de som van de kansen dat het meisje drie rode eieren trekt en dat zij drie groene trekt:
   $$\mathbb{P}(rgrgrg) + \mathbb{P}(grgrgr) = 2\frac{3}{6}\frac{3}{5}\frac{2}{4}\frac{2}{3}\frac{1}{2}\frac{1}{1} = \frac{1}{10}.$$

   b Zij X het aantal groene eieren dat het meisje trekt. Tabelleer de kansdichtheid van X.

   Op grond van a en de symmetrie krijg je: $p(0) = p(3) = 1/20$ en $p(1) = p(2) = 9/20$.

   c Bepaal de momentgenererende functie van X en de eerste twee momenten $\mathbb{E}X$ en $\mathbb{E}[X^2]$.

   De verwachting is
   $$\mathbb{E}X = \frac{9}{20} + 2\frac{9}{20} + 3\frac{1}{20} = \frac{3}{2};$$
   het tweede moment is
   $$\mathbb{E}[X^2] = \frac{9}{20} + 4\frac{9}{20} + 9\frac{1}{20} = \frac{27}{10}.$$
   Voor de momentgenererende functie vinden we
   $$M_X(t) = \frac{1}{20} + e^t\frac{9}{20} + e^{2t}\frac{9}{20} + e^{3t}\frac{1}{20}.$$

   d Zij Y het aantal groene eieren dat de jongen trekt. Bereken $\text{Cov}(X, Y)$. Zijn X en Y onafhankelijk? Waarom wel/niet?

   Merk op dat $Y = 3 - X$. Dus is $\mathbb{E}Y = 3 - \mathbb{E}X = 3/2$ (Symmetrie!) en
   $$\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X(3 - X)] = 3\mathbb{E}X - \mathbb{E}[X^2] = 3\frac{3}{2} - \frac{27}{10} = \frac{9}{5}.$$
   De covariante $\text{Cov}(X, Y) = \frac{9}{5} - \frac{9}{4} = -\frac{9}{20} \neq 0$, dus X en Y zijn afhankelijk.

Rond de antwoorden op bovenstaande vragen niet af.

2. Zij (X_1, X_2) een stochastische vector met een gegeneraliseerde hypergeometrische verdeling met kansdichtheid

$$f(x_1, x_2) = \frac{\binom{5}{x_1}\binom{2}{x_2}\binom{3}{4-x_1-x_2}}{\binom{10}{4}},$$

voor $x_1 \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ en $x_2 \in \{0, 1, 2\}$ zodanig dat $1 \leq x_1 + x_2 \leq 4$ en $f(x_1, x_2) = 0$ elders.

a Bereken de marginale verdeling van X_2.

We vermoeden dat X_2 hypergeometrisch verdeeld is met

$$f(x_2) = \frac{\binom{2}{x_2}\binom{8}{4-x_x}}{\binom{10}{4}}$$

voor $x_2 \in \{0, 1, 2\}$. Om dit te bewijzen, merken we op dat

$$\mathbb{P}(X_2 = 0) = \mathbb{P}(X_1 \in \{1, \ldots, 4\}; X_2 = 0) =$$

$$\frac{\binom{5}{1}\binom{3}{3} + \binom{5}{2}\binom{3}{2} + \binom{5}{3}\binom{3}{1} + \binom{5}{4}\binom{3}{0}}{\binom{10}{4}} = \frac{5 + 30 + 30 + 5}{210} = \frac{1}{3}.$$

Op analoge wijze verkrijgt ment $\mathbb{P}(X_2 = 1) = 8/15$ en $\mathbb{P}(X_2 = 2) = 2/15$.

b Wat is de voorwaardelijke kansdichtheid van X_1 gegeven $X_2 = 2$?

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_1 = 0 \mid X_2 = 2) &= \binom{5}{0}\binom{2}{2}\binom{3}{2}/28 = 3/28;\\
\mathbb{P}(X_1 = 1 \mid X_2 = 2) &= \binom{5}{1}\binom{2}{2}\binom{3}{1}/28 = 15/28;\\
\mathbb{P}(X_1 = 2 \mid X_2 = 2) &= \binom{5}{2}\binom{2}{2}\binom{3}{0}/28 = 10/28.
\end{aligned}$$

Rond de antwoorden op bovenstaande vragen niet af.

3. Laat X en Y onafhankelijke exponentieel verdeelde stochasten zijn met $\mathbb{E}X = 1/\lambda$, $\mathbb{E}Y = 1/\mu$.

a Beredeneer dat $U = \min\{X, Y\}$ geheugenvrij is en formuleer een vermoeden omtrent de verdeling van U. Geef vervolgens een bewijs.

X en Y zijn geheugenvrij. We vermoeden dat hetzelfde waar is voor U en dat U derhalve exponentieel verdeeld is. Om dit te bewijzen, merken we op dat voor positieve u,

$$\mathbb{P}(U > u) = \mathbb{P}(X > u; Y > u) = \exp\left[-(\lambda + \mu)u\right].$$

U is inderdaad exponentieel verdeeld met intensiteitsparameter $\lambda + \mu$.

b Bereken $\mathbb{P}(U = X)$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(U = X) &= \int\int_{\{y \geq x\}} \lambda\,\mu\,e^{-\lambda\,x}\,e^{-\mu\,y}\,dx\,dy\\
&= \int_0^\infty \lambda\,e^{-\lambda\,x}\int_x^\infty \mu\,e^{-\mu\,y}\,dx\,dy\\
&= \int_0^\infty \lambda\,e^{-\lambda\,x}\,e^{-\mu\,x}\,dx = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}.
\end{aligned}$$

c De *hazard rate* van een absoluut continu verdeelde stochastische variabele op $(0, \infty)$ met kansdichtheid f en verdelingsfunctie F is gedefinieerd als

$$h(t) := \frac{f(t)}{1 - F(t)}; \quad t \in (0, \infty) : F(t) < 1.$$

Bereken de hazard rates van X, Y, en U.
Voor X is $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ en $1 - F(t) = e^{-\lambda t}$ zodat $h(t) \equiv \mu$. Analoog volgt dat Y en U hazard rates μ en $\lambda + \mu$ hebben.

d Zij Z een absoluut continu verdeelde stochastische variabele op $(0, \infty)$ met hazard rate $h(t) = t$, $t > 0$. Wat is de verdeling van Z?
Merk op dat $h(t) = F'(t)/(1 - F(t))$ zodat

$$\log(1 - F(t)) = -\int_0^\infty h(s)\, ds + \text{ constante}$$

waaruit volgt dat

$$1 - F(t) \propto \exp\left[-\int_0^t h(s)\, ds\right] = \exp\left[-t^2/2\right],$$

een Rayleighverdeling.

Succes!