ANALYSE FONCTIONNELLE. — *Sur les espaces de Banach qui ne contiennent pas uniformément de l_n^1 .* Note (*) de M. Gilles Pisier, transmise par M. Laurent Schwartz.

On démontre la caractérisation suivante : un Banach ne contient pas uniformément de l_n^1 si et seulement s'il est de type 1 au sens de (1). De plus, s'il est de type 1, il existe $\varepsilon > 0$ tel qu'il soit de type $1 + \varepsilon$.

Pour les définitions des différents « types » des espaces de Banach, nous renvoyons à (3). Soit $\lambda \geq 1$, nous dirons qu'un espace de Banach E ne contient pas de l_n^1 λ -uniformément si la borne inférieure des distances de l_n^1 aux sous-espaces de E est strictement supérieure à λ pour au moins un entier n. Dans toute la suite les espaces de Banach sont supposés réels.

On note $(\varepsilon_n(\cdot))$ la suite des variables de Rademacher sur $[0, 1]$ muni de la mesure de Lebesgue normalisée.

Soit E un espace de Banach et n un entier; on note $\lambda_n(E)$ la plus petite constante ρ telle que, pour tout n-uple (x_i) dans E, on ait

$$\left(\int \left\| \sum_{i=1}^{i=n} \varepsilon_i(t) x_i \right\|^2 dt \right)^{1/2} \leq \sqrt{n} \rho \left(\sum_{i=1}^{i=n} \|x_i\|^2 \right)^{1/2}.$$

On vérifie aisément que $0 \leq \lambda_n(E) \leq 1$ pour tout entier n, et que, si

$$n \leq m : \sqrt{n} \lambda_n(E) \leq \sqrt{m} \lambda_m(E).$$

PROPOSITION. — *Soit E un espace de Banach, pour tous entiers n et k, on a*

$$\lambda_{nk}(E) \leq \lambda_n(E) \lambda_k(E).$$

Démonstration. — Soit (x_i) un nk-uple dans E; on pose $\forall \theta \in [0, 1]$ et $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$:

$$X_i(\theta) = \sum_{j=(i-1)k+1}^{j=ik} \varepsilon_j(\theta) x_j.$$

On a alors :

$$\forall \theta \in [0, 1] : \left(\int \left\| \sum_{i=1}^{i=n} \varepsilon_i(t) X_i(\theta) \right\|^2 dt \right)^{1/2} \leq \sqrt{n} \lambda_n(E) \left(\sum_{i=1}^{i=n} \|X_i(\theta)\|^2 \right)^{1/2},$$

d'où on déduit, en intégrant après élévation au carré :

$$\begin{aligned} \left(\int \int \left\| \sum_{i=1}^{i=n} \varepsilon_i(t) X_i(\theta) \right\|^2 dt d\theta \right)^{1/2} &\leq \sqrt{n} \lambda_n(E) \left(\sum_{i=1}^{i=n} \int \|X_i(\theta)\|^2 d\theta \right)^{1/2} \\ &\leq \sqrt{n} \lambda_n(E) \sqrt{k} \lambda_k(E) \left(\sum_{j=1}^{j=nk} \|x_j\|^2 \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

On conclut en remarquant que le premier membre vaut, par symétrie :

$$\left(\int \left\| \sum_{j=1}^{j=nk} \varepsilon_j(\theta) x_j \right\|^2 d\theta \right)^{1/2}.$$

LEMME 1. — Soit E un espace de Banach tel que $\lambda_N(E) < 1$ pour un entier N . Alors, il existe $q > 1$ tel que E soit de type q -Rademacher.

Démonstration. — Nécessairement, si $\lambda_N(E) < 1$, il existe $p' \in [2, \infty[$ tel que $\lambda_N(E) = 1/N^{1/p'}$; on déduit de la proposition que : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\lambda_{N^k}(E) \leq 1/N^{k/p'}$. Soit q réel que $1 < q < p$ avec $(1/p) + (1/p') = 1$, on montre que E est de type q -Rademacher par une technique de découpage en tranches exponentielles.

THÉORÈME. — Soit E un espace de Banach; les propositions suivantes sont équivalentes :

- (i) Pour tout λ fini, E ne contient pas de l_n^1 λ -uniformément.
- (ii) E ne contient pas de l_n^1 1-uniformément.
- (iii) E est de type 1-stable [i.e. type 1 au sens de (1)].
- (iv) E est de type p -Rademacher pour un $p > 1$.
- (v) Il existe $p > 1$ et une constante K tels que, pour toute famille finie (x_i) dans E :

$$\inf_{\varepsilon_i = \pm 1} \left\| \sum \varepsilon_i x_i \right\| \leq K \left(\sum \|x_i\|^p \right)^{1/p}.$$

Démonstration. — Les implications faciles sont : (iv) $\Rightarrow$ (v) $\Rightarrow$ (i) $\Rightarrow$ (ii) et (iii) $\Rightarrow$ (i). L'implication (iv) $\Rightarrow$ (iii) est démontrée dans (3). Il suffit donc de montrer (ii) $\Rightarrow$ (iv) : si (iv) n'est pas vérifié, le lemme 1 entraîne que $\lambda_n(E) = 1$ pour tout entier n , le lemme 2 ci-dessous montre que (ii) ne peut pas être vérifié non plus.

LEMME 2. — Soit E un espace de Banach et n un entier tels que $\lambda_n(E) = 1$; alors, pour tout $\eta > 0$, E contient un sous-espace $(1+\eta)$ -isomorphe à l_n^1 .

Démonstration. — A l'aide de la relation

$$\frac{1}{2} \sum_{i,j} (\|x_i\| - \|x_j\|)^2 = n \sum \|x_i\|^2 - \left(\sum \|x_i\| \right)^2$$

on se ramène, si $\lambda_n(E) = 1$, à la situation suivante :

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x_1, \dots, x_n$ dans E tels que

$$\sup \|x_i\| \leq 1 + \varepsilon \quad \text{et} \quad \left(\int \left\| \sum \varepsilon_i(t) x_i \right\|^2 dt \right)^{1/2} \geq n.$$

On note $[x_i]$ le sous-espace engendré par $x_1, \dots, x_n$. Soit alors ξ une forme linéaire sur $L^2([0, 1], dt, [x_i])$, telle que $\langle \xi, \sum_i \varepsilon_i(\cdot) x_i \rangle \geq n$ avec $\|\xi\| = 1$.

On a

$$n \leq \sum_{i=1}^{i=n} \langle \xi, \varepsilon_i(\cdot) x_i \rangle \leq n(1 + \varepsilon),$$

d'où, si $N = \text{card} \{ i \in \{ 1, 2, \dots, n \}; \langle \xi, \varepsilon_i(\cdot) x_i \rangle \geq 1 - \varepsilon n \}$:

$$n \leq (1 + \varepsilon)N + (n - N)(1 - \varepsilon n),$$

c'est-à-dire : $N \varepsilon (n + 1) \geq \varepsilon n^2$, soit $N \geq n^2 / (n + 1) > (n - 1)$, donc $N = n$.

On suppose dorénavant que $\varepsilon n < 1$. On a $\forall \alpha_i \in \mathbf{R}^n, \forall (\varepsilon_i) \in \{-1, 1\}^n$,

$$\left(\int \left\| \sum \alpha_i \varepsilon_i(t) x_i \right\|^2 dt \right)^{1/2} = \left(\int \left\| \sum \alpha_i \varepsilon_i \varepsilon_i(t) x_i \right\|^2 dt \right)^{1/2} \geq \sum \alpha_i \varepsilon_i \xi(\varepsilon_i(\cdot) x_i),$$

d'où

$$\left(\int \left\| \sum \alpha_i \varepsilon_i(t) x_i \right\|^2 dt \right)^{1/2} \geq \sum_{i=1}^n |\alpha_i| [1 - \varepsilon n].$$

Soit P_n la loi de $(\varepsilon_1(\cdot), \dots, \varepsilon_n(\cdot))$ sur $\{-1, 1\}^n$; soit $\delta < 1$, on pose

$$\forall (\alpha_i) \in \mathbf{R}^n, A((\alpha_i)) = \{ (\varepsilon_i) \in \{-1, 1\}^n; \left\| \sum \alpha_i \varepsilon_i x_i \right\|^2 \geq \delta^2 (\sum |\alpha_i|)^2 \}.$$

On a

$$\begin{aligned} [1 - n\varepsilon]^2 (\sum |\alpha_i|)^2 &\leq \left(\int \left\| \sum \alpha_i \varepsilon_i(t) x_i \right\|^2 dt \right) \\ &\leq P_n(A((\alpha_i))) (\sum |\alpha_i|)^2 (1 + \varepsilon)^2 + [1 - P_n(A((\alpha_i)))] \delta^2 (\sum |\alpha_i|)^2, \end{aligned}$$

d'où on déduit, si $\sum |\alpha_i| \neq 0$:

$$P_n(A((\alpha_i))) \geq \frac{(1 - n\varepsilon)^2 - \delta^2}{(1 + \varepsilon)^2 - \delta^2}.$$

Si on a choisi ε assez petit pour que

$$\frac{(1 - n\varepsilon)^2 - \delta^2}{(1 + \varepsilon)^2 - \delta^2} > \frac{2^n - 1}{2^n},$$

on en déduit $A((\alpha_i)) = \{-1, 1\}^n$ d'où

$$\delta \sum_{i=1}^n |\alpha_i| \leq \left\| \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \right\| \leq (1 + \varepsilon) \sum_{i=1}^n |\alpha_i|$$

et $[x_i]$ est $[(1 + \varepsilon)/\delta]$ -isomorphe à l_n^1 .

Ce qui démontre le lemme puisque δ est arbitrairement proche de 1.

Le lemme précédent généralise un résultat de ⁽⁵⁾ (I, lemma 6).

COROLLAIRE 1. — Soit E un espace de Banach, $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $p \in]1, \infty[$. Si $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu, E)$ contient λ -uniformément des l_n^1 , il en est de même de E .

COROLLAIRE 2. — Tout espace de Banach uniformément convexe est de type p -Rademacher pour un $p > 1$.

Le corollaire suivant répond partiellement à une question de ⁽¹⁾ (n° 121), dont nous empruntons les notations :

COROLLAIRE 3. — *Un espace de Banach E est de type 1-stable si et seulement s'il existe une constante C telle que, pour tout quotient G de E' et pour tout opérateur u de G à valeurs dans un Banach :*

$$\pi_{1/2}(u) \leq C \pi_1(u).$$

Remarques. — D'après ⁽³⁾ un espace de type p -Rademacher est de type q -stable pour $q < p$. Le théorème précédent est donc une généralisation d'un résultat de H. P. Rosenthal sur les sous-espaces de L^1 [⁽⁴⁾, théorème 8].

L'implication (iii) $\Rightarrow$ (iv) du théorème a été démontrée indépendamment par B. Maurey.

Enfin les résultats précédents sont à rapprocher de ceux de ⁽²⁾ sur le « cotype » des espaces de Banach qui ne contiennent pas uniformément de l_n^∞ .

(*) Séance du 1^{er} octobre 1973.

⁽¹⁾ B. MAUREY, *Théorèmes de factorisation pour les opérateurs linéaires à valeurs dans un espace L_p* (à paraître dans *Astérisque*).

⁽²⁾ B. MAUREY et G. PISIER, *Comptes rendus*, 277, série A, 1973, p. 687.

⁽³⁾ G. PISIER, *Comptes rendus*, 276, série A, 1973, p. 1673.

⁽⁴⁾ H. P. ROSENTHAL, *Ann. of Math.*, 97, n° 2, 1973, p. 344-373.

⁽⁵⁾ D. GIESY, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 125, 1966, p. 114-146.

Centre de Mathématiques,
École Polytechnique,
17, rue Descartes,
75230 Paris-Cedex 05.